סוגיות בבנקאות 17, תשרי התשס"ו – נובמבר 2005, 37-60
ISSN 0334-6323

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר

התפלגות א-פרמטרית הגלומה באופציות מטבע חוץ

*רועי שטיין**

תקציר

עבודה זו מציגה שיטה א-פרמטרית לחישוב ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, בהתבסס על מחירי אופציות שקל-דולר הנסחרות בבורסה לניירות ערך בתל-אביב. התפלגות שער החליפין, כפי שצופים אותה השווקים, משתקפת היטב במחירי האופציות בשערי מימוש שונים. זאת מפני הרגישות הגבוהה של מחירי האופציות להתפתחויות הצפויות בשוק מטבע-החוץ.

אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר מתבססת בעבודה זו על "הטענה האלמנטרית" (elementary claim), המתבטאת בנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. אמידת ההתפלגות נעשית ללא הנחה לגבי צורת ההתפלגות ואו לגבי התהליך הסטוכסטי של שער החליפין - שיטה הידועה כשיטת אמידה א-פרמטרית של ההתפלגות. יתרונה של שיטת אמידה זו על פני השיטה הפרמטרית הוא בגמישות הרבה של צורת ההתפלגות, שאינה מוגבלת על ידי פונקציית התפלגות כלשהי. מניתוח ההתפלגות הצפויה, המכילה מידע מפורט לגבי ציפיות ציבור המשקיעים, ניתן ללמוד על ההתפתחויות העתידיות בשוק מטבע-חוץ וכן על ההסתברויות השונות לשינויים חריגים יחסית, הצפויים להתממש בשער החליפין.

א. מבוא ומוטיבציה

אומדני הציפיות של הציבור, המתקבלים ממחירי הנכסים הפיננסיים, מהווים בסיס לניתוח ההתפתחויות המוניטריות ותנועות ההון של הסקטור הפרטי. אחת השאלות המרכזיות לגבי אומדני ציפיות אלו, המשקפים את ממוצע הציפיות של כלל ציבור המשקיעים, היא מהי רמת אי-הוודאות הקיימת בהם. במידה ורמת אי-הוודאות קטנה, הרי שטווח הציפיות צר יחסית, וממוצע הציפיות ישקף במידה טובה את ציפיות כלל

---

* בנק ישראל, המחלקה המוניטרית. דוא"ל: roy_s@boi.gov.il
תודה לחברי המחלקה המוניטרית של בנק ישראל שהשתתפו בסמינר המחלקתי, ליואל הכט מיחידת המחקר של הפיקוח על הבנקים על הערותיו המועילות ובמיוחד להלנה פומפושקו מהמחלקה המוניטרית בבנק ישראל על עזרתה ביישום האלגוריתמים ב-SAS.

ציבור המשקיעים. לעומת זאת, במידה ורמת אי-הוודאות גדולה, הרי שטווח הציפיות רחב יחסית וישנן ציפיות השונות מאוד מהממוצע. במקרה זה יהווה ממוצע הציפיות אומדן פחות טוב לציפיות כלל ציבור המשקיעים. אם כן, אמינותו של ממוצע הציפיות כאומדן לציפיות הציבור תלויה ברמת אי-הוודאות, המשתקפת בסטיית התקן של ממוצע הציפיות. יתרה מכך, מניתוח אומדני הציפיות בעזרת מחירי האופציות ניתן לגזור לא רק את ממוצע הציפיות וסטיית התקן של הממוצע, המייצגים את שני המומנטים הראשונים בהתפלגות הצפויה, אלא גם מומנטים גבוהים יותר, המשתקפים בצורת ההתפלגות כולה. בחינה כזו תאפשר לחשב גם את מידת הא-סימטריה של הציפיות וכן את ההסתברות לשינויים חריגים יחסית, הצפויים להתממש בשער החליפין.

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין, המכילה מידע מפורט לגבי ציפיות ציבור המשקיעים, מקנה מידע חשוב בגיבוש המדיניות המוניטרית. זאת, במיוחד במשקים קטנים ופתוחים, כדוגמת המשק הישראלי, שיש בהם קשר סטטיסטי הדוק וחיובי בין האינפלציה לבין השינויים בשער החליפין. קשר זה צפוי להתקיים גם בין הציפיות לשינויים בשער החליפין לבין הציפיות האינפלציוניות. מכאן חשיבותו של המידע הטמון בהתפלגות הצפויה של שער החליפין בגיבוש המדיניות המוניטרית.

הספרות המקצועית מתארת מספר שיטות לחישוב ההתפלגות הצפויה של מחיר נכס פיננסי כלשהו, על בסיס מחירי האופציות בשערי מימוש שונים, סביב מחיר אותו הנכס. חלק מהשיטות מניחות פונקציית התפלגות כלשהי ואומדות את הפרמטרים של הפונקציה על ידי התאמה (Best Fit) בין מחירי האופציות בפועל לבין מחיריהן התיאורטיים; כאשר המחירים התיאורטיים נקבעים על פי נוסחה לתמחור אופציות, הכוללת בתוכה הנחות לגבי פונקציית ההתפלגות או לגבי מהלכו של נכס הבסיס. שיטות אלו נקראות שיטות פרמטריות, ומובנה בתוכן מספר פרמטרים, המכתיבים את צורת ההתפלגות1. יתרונן של שיטות אלו טמון במידע הרב אשר ניתן לגזור מהן, כדוגמת ארבעת המומנטים הראשונים של ההתפלגות. אולם חסרונן טמון בשיטת האמידה עצמה, המגבילה את פונקציית ההתפלגות הנאמדת כך שתותאם למסגרת ההנחות שבבסיסה. שיטה שנייה, שהיא פשוטה יותר, גוזרת את ההתפלגות ללא הנחות לגבי פונקציית ההתפלגות או לגבי התהליך הסטוכסטי של נכס הבסיס. שיטה זאת מבוססת על הרגישות של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש שלהן בתאריכי פדיון זהים2. שיטת גזירה זו נקראת שיטה א-פרמטרית – ללא צורך במשוואה לתמחור אופציות. במסגרת מאמר זה נציג את ההסבר האינטואיטיבי והמתמטי בגזירת ההתפלגות בשיטה הא-פרמטרית, ניישם שיטה זו ונאמוד את

[1] ראה למשל Jackwerth and Rubinstein (1996), Melick and Thomas (1997), והכט ושטיין (2004).

[2] ראה למשל Bates (1991), Shimko (1993),Aït-Sahalia and Lo (1995).

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, בעזרת האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך.

ב. מתודולוגיה

גזירת ההתפלגות הצפויה בשיטת אמידה א-פרמטרית מבוססת על הטענה האלמנטרית (elementary claim), אשר הוצגה לראשונה על ידי Arrow (1964) ו-Debreu (1959), וידועה בספרות המקצועית כ-Arrow-Debreu-Security. נכס אלמנטרי מוגדר כנכס המניב יחידה אחת של כסף. זאת בתנאי שנכס הבסיס שווה בזמן הפדיון לערך מסוים שנקבע מראש, ואפס אחרת. מחירו של נכס זה יימצא בטווח שבין אפס לאחד. כאשר המאורע המיוצג על ידי הנכס האלמנטרי צפוי להתרחש באופן ודאי, מחירו יהיה שווה לאחד, או לכל הפחות ישאף לאחד, שהרי תזרים המזומנים הצפוי לנבוע ממנו הוא יחידה אחת של כסף. אולם, כאשר המאורע המיוצג על ידי הנכס צפוי לא להתרחש באופן ודאי, מחירו יהיה נמוך ואף ישאף לאפס. אלו שני המקרים הקיצוניים בקשת האפשרויות של מחיר הנכס האלמנטרי, הנקבע על פי ההסתברות שהמאורע אכן יתממש. בין שני מקרי קיצון אלו ישנה קשת רחבה של הסתברויות להתממשות המאורע. מחירי הנכסים האלמנטריים ינועו בטווח שבין אפס לאחד, בהתאם להסתברויות אלו. מכאן, בהנחה שציבור המשקיעים אדיש לסיכון[3], מחיר הנכס האלמנטרי ישקף את ההסתברות למימושו. בעולם שבו קיימת אי-ודאות לגבי שינויים עתידיים במחירו של נכס הבסיס ושקיימים בו אין-סוף נכסים אלמנטריים שתאריכי פדיונם זהה, באין-סוף שערי מימוש שונים, אזי סכום מחירי כל הנכסים יחדיו שווה ליחידה אחת מהוונת של כסף, בשיעור הריבית חסרת הסיכון.

נכסים אלמנטריים אינם נסחרים בשווקים הפיננסיים, אולם ניתן להעתיק את מאפייניהם באמצעות שילוב מסוים של מספר אופציות, שתאריכי פדיונן זהה ושערי המימוש שלהן שונים[4]. אופציות, שהן הנכסים הקרובים ביותר לנכסים אלמנטריים, מניבות תזרים מזומנים חיובי בשערי מימוש מסוימים ואפס בשערי מימוש אחרים. באמצעות עסקה המשלבת מספר אופציות בשערי מימוש שונים, המוכרת כאסטרטגיית "פרפר", ניתן ליצור תיק שתשואתו תהיה דומה לנכס אלמנטרי.

להעתקת המאפיינים של נכס אלמנטרי יש לבצע שלוש עסקאות שונות באופציות Call[5] בטווח פדיון קבוע, τ, ובשערי מימוש K_1, K_2, K_3, כאשר $K_1 < K_2 < K_3$ בפערים קבועים, ומחיריהם נתונים וידועים $C(K_1,\tau), C(K_2,\tau), C(K_3,\tau)$, בהתאמה: קניית אופציה אחת בשער מימוש של K_1, קניית אופציה נוספת בשער מימוש של K_3 ומכירת שתי אופציות בשער מימוש של K_2. עלות אסטרטגיית הפרפר שווה ל-

---

[3] ציבור משקיעים זה אדיש בין השקעה בנכס המניב רווח קבוע וידוע מראש לבין השקעה בנכס המניב רווח לא קבוע, אבל בעל תוחלת רווח השווה לרווח מהנכס הראשון.

[4] ראשונים שהוכיחו זאת היו Breeden and Litzenberger (1978).

[5] ניתן לבצע את אותן העסקאות גם באופציות Put, ולקבל את מאפייני הנכס האלמנטרי.

$C(K_3,\tau)+C(K_1,\tau)-2C(K_2,\tau)$, והיא תניב תזרים מזומנים חיובי רק במצב מסוים אחד - מחיר נכס הבסיס יהיה שווה ל-K_2 בעת הפדיון - תזרים מזומנים הדומה במאפייניו לנכס אלמנטרי. תזרים המזומנים שיתקבל שווה לפער בין שערי המימוש (ΔK), שהרי כששער החליפין יהיה שווה בזמן הפדיון ל-K_2, רק האופציה בשער מימוש K_1 *תמומש*.

בהינתן שוק הון משוכלל וציבור משקיעים אדיש לסיכון[6] (Risk Neutral Density), עלות האסטרטגיה שתוארה לעיל שווה לתוחלת תזרים המזומנים העתידי, מהוונת בריבית חסרת הסיכון במשק. תוחלת תזרים המזומנים מורכבת משתי אפשרויות: תזרים חיובי וידוע מראש, ΔK, שיתרחש בהסתברות הצפויה ותזרים של אפס - בהסתברות המשלימה. לכן, השוואה בין העלות לבין תזרים המזומנים העתידי, בהתחשב בגורם ההיוון, תאפשר לחשב את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה סביב מחיר המימוש K_2 בעת הפדיון של האופציות:

$$(1)\Delta K \times P(S_T = K_2; \Delta K) + 0 \times (1 - P(S_T = K_2; \Delta K)) = e^{r\tau}[c(K3,\tau) + c(K1,\tau) - 2c(K2,\tau)]$$

נצמצם את הערכים האפסיים ונחלץ את ההסתברות:

$$(2)\quad P(S_T = K_2; \Delta K) = e^{r\tau}\,\frac{c(K_3,\tau) + c(K_1,\tau) - 2c(K_2,\tau)}{\Delta K}$$

בעולם היפותטי, שבו מחיר נכס הבסיס נקבע באופן בדיד ובהתאם לשערי המימוש של האופציות, ההסתברות בנוסחה לעיל מתארת את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס, S_T, שווה ל-K_2. אולם, כשמחיר נכס הבסיס נקבע בפערים קטנים מהפערים של שערי המימוש, הנוסחה שלעיל מתארת את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה בסביבה הקרובה של K_2[7]. כדי לקבל את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה שווה ל-K_2 יש לחלק את תזרים המזומנים בפער שבין שערי המימוש. נשכתב את משוואה 2 באופן הבא[8]:

$$(3)\quad P(S_T = K2) = e^{r\tau}\,\frac{[c(K3,\tau) - c(K2,\tau)] - [c(K2,\tau) - c(K1,\tau)]}{(\Delta K)^2}$$

---

[6] לפי Hull, הנחה זו לא הכרחית והיא מונחת לשם הפשטות. לטענתו, זאת משום שגם בהנחה שציבור המשקיעים אינו אדיש לסיכון, ישתנו הן התשלומים העתידיים שבנוסחת התמחור הכללית והן הריבית שבעזרתה מהוונים את התשלומים. ההשפעות של שני גורמים אלו מקזזות זו את זו באופן מלא. במסגרת עבודה זו ולמרות טענתו של Hull, אנו מניחים בעבודה זו RND. הסיבה לכך, היא כפי שציין Hull - הפשטות.

[7] ההסתברות מתייחסת למקרה שמחיר נכס הבסיס יהיה בזמן הפדיון בטווח הבא: $\frac{K_1+K_2}{2} \le S_T \le \frac{K_2+K_3}{2}$

[8] שיכתוב משוואה 3 נעשה בהנחה שההסתברות ששער החליפין שווה במדויק ל-K_2 הינה אחידה לכל השערים האפשריים בסביבה הקרובה של K_2.

משוואה 3, מחשבת את ההסתברות ש-K_2 אכן יתממש בזמן הפדיון של האופציות. היא מבוססת, כאמור, על עלות אסטרטגיית הפרפר סביב K_2, וניתן לראות כי היא משקפת את הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשער המימוש בנקודה K_2 (ראה דיון חלק ג'). נכליל דוגמה זו על כל שערי המימוש האפשריים ונחשב את ההסתברות לשער חליפין עתידי כלשהו S_T, על פי עלות הביצוע של עסקת הפרפר סביב שער המימוש השווה ל-S_T:

$$(4)\quad f(S_T,\tau)=e^{r\tau}\left.\frac{\left[c\,(S_T+\Delta S_T,\tau)-c\,(S_T,\tau)\right]-\left[c\,(S_T,\tau)-c(S_T-\Delta S_T,\tau)\right]}{(\Delta S_T)^2}\right|_{K=S_T}$$

כאשר:

$f(S_T,\tau)$ – פונקציית הצפיפות, ההסתברות שנכס הבסיס שווה ל-S_T בזמן הפדיון.

$c(S_T,\tau)$ - מחיר אופציית Call בשער מימוש S_T ובטווח פדיון τ.

ΔS_T – המרווח בין שערי מימוש קרובים.

בהינתן מידע אודות מחירי אופציות בשלושה שערי מימוש קרובים סביב שער S_T, משוואה 4 משקפת את ההסתברות שנכס הבסיס יהיה שווה ל-S_T בזמן הפדיון של האופציות. על כן, בהינתן מספר רב של אופציות בשערי מימוש שונים, ניתן לחשב את ההתפלגות של מחיר נכס הבסיס הצפוי להיות בזמן הפדיון. בחלק ג' תוצג ההוכחה המתמטית כי משוואה 4 אכן משקפת את פונקציית הצפיפות של נכס הבסיס ומבוססת על הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש.

ג. הוכחה מתמטית לשיטת חישוב א-פרמטרית של ההתפלגות

בחלק זה נוכיח מתמטית את הקשר בין ההתפלגות הצפויה של נכס הבסיס לבין הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש השונים. תחילה נראה כי משוואה 4, המתבססת על ההשוואה בין עלות עסקת הפרפר לבין תזרים המזומנים בזמן פדיון האופציות, מייצגת את הנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס לשער המימוש. בשלב השני, נוכיח מתמטית כי הנגזרת השנייה אכן משקפת את ההתפלגות של מחיר נכס הבסיס.

כאשר ממירים את מחירי האופציות בשערי מימוש שונים לפונקציה רציפה של כל שערי המימוש האפשריים – מצב שבו פער שערי המימוש שואף ל-0, ניתן לתאר את שני רכיבי משוואה 4 כנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס לשער המימוש, כלהלן:

$$(5)\quad \lim_{\Delta S_T \to 0} f(S_T,\tau) = e^{r\tau}\frac{\partial^2 c(K,\tau)}{\partial K^2}$$

לפיכך, פונקצית הצפיפות של מחיר נכס הבסיס, $f(S_T,\tau)$, מחושבת כפונקציה רציפה של עלות אסטרטגיית הפרפר לכל שער חליפין אפשרי (ראה דיון בחלק ב׳). נוכיח מתמטית טענה זו בעזרת חישוב הנגזרת הראשונה והשנייה של המשוואה הכללית לתמחור אופציות, שפותחה על ידי Cox and Ross (1976). להלן המשוואה הכללית עבור אופציות Call[9]:

$$(6)\quad c(K,\tau) = e^{-r\tau}\int_K^\infty f(S_T,\tau)(S_T-K)dS_T$$

המשוואה הכללית לתמחור אופציות אינה כוללת בתוכה הנחה כלשהי לגבי פונקציית ההתפלגות של נכס הבסיס והיא מבוססת אך ורק על הפרמטרים הרלוונטיים לתמחור אופציות. בהינתן ציבור משקיעים אדיש לסיכון[10] (Risk Neutral Density), מחיר האופציה שווה לערך המהוון, בריבית חסרת סיכון של סכום התשלומים האפשריים, כפול ההסתברות להתרחשותם.

גזירת משוואה 6, לפי שער המימוש, K, מתבצעת בעזרת Leibniz's Rule, המגדיר שני שלבים ביישום הגזירה, כיוון שזו כוללת גזירת אינטגרל לפי מחיר נכס הבסיס, S_T. השלב הראשון בגזירת המשוואה הינו גזירת הפונקציה הפנימית ללא האינטגרל:

$$(7)\quad \frac{\partial c(K,\tau)}{\partial K} = -e^{-r\tau}\int_K^\infty f(S_T,\tau)dS_T$$

השלב השני הינו חישוב האינטגרל של פונקצית הצפיפות:

$$(8)\quad \frac{\partial c(K,\tau)}{\partial K} = -e^{-r\tau}[1-F(S_T,\tau|S_T=K)]$$

הנגזרת הראשונה של המשוואה הכללית למחירי אופציות תלויה אפוא בסכום של ההסתברויות של כל שערי נכס הבסיס האפשריים מתחת לנקודה K שהיא ההתפלגות המצטברת, F, של נכס הבסיס בזמן הפדיון. לחישוב הנגזרת השנייה של המשוואה הכללית למחירי האופציות נגזור את משוואה 8 לפי שער המימוש, K, ונקבל:

$$(9)\quad \frac{\partial^2 c(K,\tau)}{\partial K^2} = e^{-r\tau} f(S_T,\tau|S_T=K)$$

[9] ניתן להוכיח את הטענה באופן דומה גם בעזרת המשוואה הכללית לתמחור אופציות Put.

[10] ראה הערה 6.

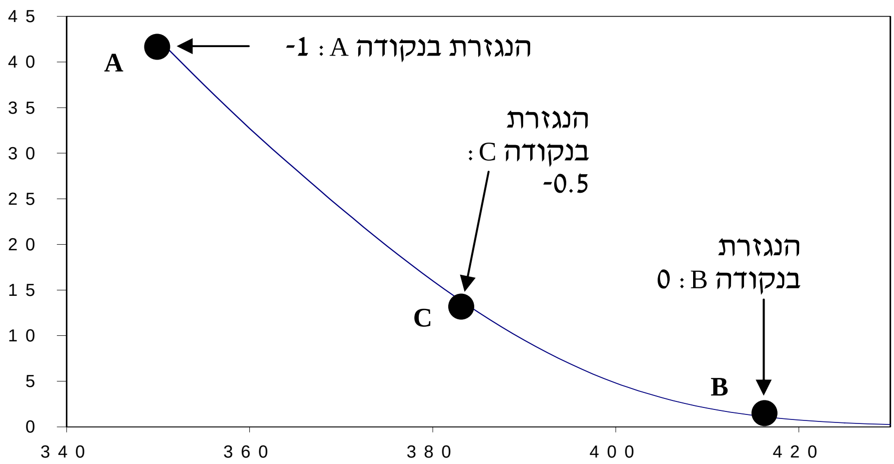
על פי משוואה 9, ניתן לראות כי הנגזרת השנייה של המשוואה הכללית משקפת את פונקציית הצפיפות של נכס הבסיס, המהוונת בריבית חסרת הסיכון לתקופת חיי האופציות. תוצאה זו מוכיחה כי צורת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר ניתנת לחישוב על ידי גזירת מחירי האופציות שקל-דולר, הנסחרות בבורסה בשערי מימוש שונים. נדגיש כי צורת ההתפלגות על בסיס חישוב זה אינה מאופיינת על ידי פונקציית התפלגות כלשהי. על כן התפלגות זו נקראת התפלגות א-פרמטרית.

ג1. הסבר אינטואיטיבי לשיטת החישוב

בחלק זה נציג את ההסבר האינטואיטיבי של שיטת חישוב ההתפלגות, בעזרת בחינת משמעות הקשר בין מחירי האופציות לשערי המימוש שלהן.

ציור 1

דוגמה תיאורטית: מחירי אופציות Call, לפי שערי מימוש



כשמחיר המימוש של אופציית Call נמוך במידה משמעותית ממחיר נכס הבסיס (ציור 1, נקודה A) - מצב שבו האופציה נמצאת עמוק "בתוך הכסף" - מחירה הגבוה ישקף, בין היתר, ציפיות לתזרים מזומנים חיובי בעת המימוש. השינויים במחירי האופציות בסביבת שערי מימוש אלו, כפונקציה של שערי המימוש, יהיו ביחס הפוך לשינויים בשערי המימוש: כל עלייה בשער המימוש תתפרש כירידה צפויה בתזרים המזומנים העתידי ותתבטא בירידה במחיר האופציה בשיעור דומה. לכן, נגזרת המחיר ביחס לשערי המימוש בסביבה זו שואפת ל-1-. בשערי מימוש אלו ציבור המשקיעים מעריך כי האופציות צפויות להתממש בוודאות גבוהה. על כן, ניתן להסיק כי ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה נמוך משערי מימוש אלו שואפת לאפס (אחד פלוס הנגזרת).

אולם, ככל שעולים בציר K (בשערי המימוש) כך השינויים במחירי האופציות הולכים וקטנים והערך המוחלט של הנגזרת קטן בצורה מונוטונית, עד כדי אפס. תופעה זו, שבה הנגזרת של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש שואפת לאפס, מתקיימת בשערי מימוש הגבוהים משמעותית ממחיר נכס הבסיס (ציור 1, נקודה B) – כלומר אופציה הנמצאת רחוק "מחוץ לכסף". בשערי מימוש אלו השוק מעריך כי האופציות לא צפויות להתממש. לפיכך, ניתן להסיק שההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה נמוך משערי מימוש אלו גבוהה מאוד עד כדי ודאית (אחד פלוס הנגזרת).

יוצא אפוא כי מחירי האופציות משתנים במידה שונה בין שערי המימוש השונים, כאשר בשערי מימוש גבוהים במיוחד המחירים כמעט ולא משתנים ובשערי המימוש נמוכים במיוחד המחירים משתנים כמעט בכל גודל השינוי בשער המימוש. בין שני קצוות אלו ישנה קשת רחבה של אפשרויות שבהן מידת השינוי במחירי האופציות ביחס לשערי המימוש משתנה. שינויים אלו מצביעים על ההבדלים בסיכויי המימוש של האופציות בשערי המימוש השונים, בעיני סוחרי האופציות. למשל, בנקודה שבה מחיר האופציה משתנה בחצי מגודל השינוי בשער המימוש, נגזרת השווה לחצי בערכה המוחלט, מסמן שער המימוש של האופציה בנקודה זו את אחד האומדנים של השער הצפוי – חציון ההתפלגות (ציור 1, נקודה C). זו הנקודה שבה ישנם 50 אחוזי סיכוי למימוש האופציה (ו-50 אחוזי סיכוי לא לממש אותה).

ד. הנתונים והמדגם

עבודה זו מתבססת על נתוני השוק של אופציות שקל-דולר, הנסחרות בבורסה לניירות ערך. בבורסה נסחרות מספר סדרות הנבדלות ביניהן בתאריכי פדיונן. בכל סדרה נסחרות גם אופציות Call וגם אופציות Put במספר שערי מימוש קבועים[11]. מועדי המימוש של סדרות האופציות הם בכל חודש. באופן זה, בכל נקודת זמן קיימות שלוש סדרות של אופציות לכל אחד משלושת החודשים הקרובים וסדרה נוספת לתום הרביע הבא. במהלך שנת 2002 הונפקה סדרת אופציות נוספת, שמועד פקיעתן הוא בתום השנה הקלנדרית. השער הקובע למימוש האופציות הוא השער האחרון שפרסם בנק

[11] כללי הרישום של סדרות האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך נכון לתקופת המדגם:

- תחילת תקופה: טווח מחירי המימוש קבוע ועומד על 70 אגורות - שמונה אופציות בעלות מחירי מימוש שונים. אופציה אחת במחיר מימוש השווה לשער הדולר, ארבע אופציות במחיר מימוש גבוה משער הדולר ושלוש אופציות במחיר מימוש נמוך משער הדולר (בהפרשים של 10 אגורות זו מזו).
- במשך התקופה: יונפקו בכל יום מסחר אופציות נוספות (למעט השבוע האחרון למועד המימוש), בהתאם למהלכו של שער הדולר. כאשר יהיו אופציות במחירי מימוש הגבוהים משער הדולר בשלושים אגורות ובמחירי מימוש הנמוכים משער הדולר בעשרים אגורות (טווח מינימלי של 50 אגורות).
- כאשר טווח האופציות מתקצר ל-4 חודשים ומטה חל כלל נוסף: יונפקו ארבע אופציות בעלות שערי מימוש סביב שער הדולר בהפרשים של חמש אגורות. (כלל זה תופס רק כשסטיית התקן השנתית לא גבוהה מ-15 אחוזים).

נציין כי הבורסה לניירות ערך משנה מעת לעת את כללי הרישום בהתאם לצורכי השוק והם מפורסמים באתר האינטרנט של הבורסה.

ישראל, לפני תאריך המימוש ובתנאי שביום זה מתקיים מסחר בבורסה. האופציות הנסחרות בבורסה נקראות "מוצרי מדף" והן הומוגניות במאפייניהן, בניגוד לאופציות בבנקים המסחריים, המותאמות לצרכי הלקוחות השונים.

במקביל לדגימת נתוני האופציות נדגם שער החליפין שקל-דולר ששרר באותה העת בשווקים. לעומת זאת, נתוני הריבית השקלית והדולרית הרלוונטית לתקופת חיי האופציות לא נדגמו באופן ישיר מהשווקים והם חולצו מתוך מחירי האופציות בעזרת משוואת Put Call Parity (ראה נספח 1). שיטה זו עוקפת את הבעייתיות בבחירת הריביות הרלוונטיות לציבור המשקיעים.

מרבית המסחר באופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך הינו לטווחי פדיון קצרים (עד 30 יום) ובשערי מימוש הקרובים לשער החליפין הידוע. בטווחי הפדיון הקצרים היקף המסחר מתפרס על פני מספר רב יחסית של שערי מימוש, ואילו בטווחי הפדיון הארוכים יותר נסחרות בממוצע רק שלוש אופציות בשערי מימוש שונים. בדרך כלל, סביב שער החליפין שקל-דולר הידוע. לכן, עבודה זו משתמשת בסדרת אופציות בעלת טווח פדיון קצר יחסית, סביב 30 יום לפדיון, כדי לאמוד את ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר.

הנתונים נשמרים במאגרי המידע של המחלקה המוניטרית של בנק ישראל, בכל יום מסחר החל מחודש אוקטובר 2002. על כן ניתן לחשב את ההתפלגות של שער החליפין ברמה היומית ולבחון את השינויים המתקבלים בצורת ההתפלגות.

ה. יישום שיטת החישוב

במסגרת שיטה זו, המוצגת במאמר, ההתפלגות המחושבת משקפת את ממוצע ההתפלגויות הסובייקטיביות של כל אחד מהשחקנים השונים בשוק האופציות. שחקנים שונים בשוק רואים לנגד עיניהם התפלגויות שונות, ומחירי האופציות הנסחרות בשערי מימוש שונים נקבעים בהתאם לממוצע ההתפלגויות הסובייקטיביות של השחקנים. יתרה מכך, ההתפלגות הנאמדת איננה בהכרח ההתפלגות האמיתית של שער החליפין העתידי, וייתכן כי נוספים לה אלמנטים סובייקטיביים הקשורים בקבלת החלטות תחת סיכון. עם זאת, להתפלגות שצופים השחקנים השונים בשווקים נודעת השפעה רבה על התנהגותם, ולכן התפלגות זו עשויה לעניין יותר מאשר ההתפלגות האמיתית (לדיון, ראה הכט ושטיין 2004). ביישום ההתפלגות הנגזרת מהאופציות בשערי מימוש שונים, על פי שיטת החישוב הא-פרמטרית, נצביע על מספר בעיות אמפיריות ודרכי התמודדות עם בעיות אלו.

ה.1. בעיות ביישום הגישה

ישנן מספר בעיות ביישום האמפירי של שיטת החישוב:

1. טווח שערי המימוש של האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך אינו רחב דיו. על כן, לא ניתן לגזור ישירות מהאופציות הנסחרות את קצוות ההתפלגות.

2. המרווחים בין שערי המימוש גדולים יחסית – חמש ועשר אגורות. זאת, לעומת מחירו של נכס הבסיס (שער השקל-דולר) אשר נע במרווחים של עשירית האגורה. ההבדל בין המרווחים הללו מהווה מגבלה בחישוב ההסתברות לכל מחיר אפשרי של נכס הבסיס. בנוסף, בעיה זו מצביעה על מיעוט יחסי של אופציות בשערי מימוש שונים, בכל נקודת זמן.
3. מסחר דליל במיוחד באופציות בעלות שערי מימוש הרחוקים מהשער הידוע. בעיה אשר משפיעה, בין היתר, על אחידות הנתונים בנקודת זמן אחת[12]. לצורך חישוב ההתפלגות חשוב לדגום את כל מחירי האופציות בשערי מימוש שונים, שהתבצעו על סמך אינפורמציה אחידה (מחיר נכס הבסיס, שערי הריבית וכולי). כאשר העסקאות באופציות בשערי מימוש שונים התבצעו בנקודות זמן שונות במהלך יום המסחר (עד לשעת הדגימה) הן לא ישקפו אינפורמציה אחידה. לכן, חישוב ההתפלגות המסתמך על כל מחירי האופציות בשערי המימוש השונים עשוי לשקף מידע מטעה הנובע מאי-אחידות הנתונים.
4. תאריכי הפקיעה של סדרות האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך הם אחת לחודש. לכן, בכל יום מסחר הטווח לפדיון אינו קבוע – דבר המקשה על השוואת ההתפלגות במספר תאריכים שונים במהלך החודש.

מיעוט התצפיות המאפיין את המסחר בבורסה לניירות ערך, שמקורו בבעיות שהועלו ב-1 ו-2, יחד עם הבעייתיות הכללית בדגימת נתוני מסחר, מקשים על יישום פשוט של שיטת החישוב של ההתפלגות. ההתפלגות על פי השיטה הא-פרמטרית מחושבת, כאמור, כנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. כל הטיה קטנה במחיר אחת האופציות תשפיע על השיפוע של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש - הנגזרת הראשונה, וביתר שאת על הנגזרת השנייה של מחירי האופציות. לכן, יש להחליק את מחירי האופציות בשערי המימוש השונים ולקבוע ערכי ביניים, כך שמחירי האופציות בשערי מימוש שונים יהיו רציפים, ללא הטיות הנובעות מדגימת המחירים - ראה חלק ה2.

בשל בעיית אי-אחידות האינפורמציה במחירי האופציות הנסחרות (בעיה מס׳ 3), עדיף לדגום את מחירי ההיצע והביקוש, כפי שהם מופיעים בספרי הבורסה לניירות ערך, על פני דגימת מחירי העסקאות בפועל. כאשר המסחר דליל, ומתבצעות עסקאות בודדות במספר אופציות שונות, שכל אחת מהן נוצרה במועד שונה במהלך יום המסחר – מחיריהן יסתמכו על פרמטרים שונים שהשתנו במהלך יום המסחר, כדוגמת מחיר נכס הבסיס. לפיכך, ההתפלגות הצפויה שתחושב על פי מחירים אלו עלולה להיות מוטה ולא תשקף באופן נכון את ההתפלגות. לעומת זאת, מחירי ההיצע והביקוש לכל אופציה, כפי שמופיעים בספרי הבורסה, מהווים מחירים שניתן לבצע בהם עסקאות – קנייה ומכירה – בכל האופציות בו-זמנית (בנקודת זמן אחת). לכן

[12] בעיה זו משפיעה גם על פרמיית הנזילות הגבוהה יותר בנכסים פיננסיים הסחירים פחות.

ממוצע מחירי ההיצע והביקוש מהווה את המחיר הקרוב ביותר שניתן לקנות ולמכור כל אחת מהאופציות בשערי מימוש שונים, ברגע נתון. ראוי לציין כי כל הנתונים הרלוונטיים לצורך חישוב ההתפלגות, הנכונה לתאריך מסוים, מתקבלים באותה נקודת זמן וכפי שציבור המשקיעים מתמחר את כל אחד מהנכסים ברגע נתון.

תאריכי הפקיעה (בעיה מס׳ 4) של סדרות האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך קבועים, ולכן הטווח לפדיון משתנה בכל יום מסחר. הדבר מקשה על ההשוואה בין צורות ההתפלגות השונות, שכן הן מייצגות טווחי זמן שונים. לצורך השוואה בין התפלגויות בתאריכים שונים נחשב מחירי אופציות סינתטיות לטווח פדיון קבוע - 30 יום, על בסיס מחירי האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך, בטווח פדיון הקרוב ביותר ל-30 יום[13].

ה.2. החלקת מחירי האופציות

תנאי הכרחי ביישום השיטה הא-פרמטרית הוא שמחירי האופציות בשערי המימוש השונים יהיו ללא הטיות, רציפים וגזירים. בהתאם לזאת, יש להחליק את מחירי האופציות הנדגמים מהשווקים, כך שהשיפוע של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש השונים יהיה רציף בכל נקודה ונקודה. אולם, החלקת מחירי האופציות בשערי מימוש שונים אינה פשוטה ליישום ומחייבת לפתח שיטות החלקה מתוחכמות יחסית. זאת, כיוון שלא ניתן לתאר בעזרת פונקציה כלשהי את מחירי האופציות בשערי מימוש שונים בצורה טובה[14]. Shimko (1993) הציע לראשונה להחליק את מחירי האופציות בשערי המימוש השונים ולקבוע ערכי ביניים[15] דרך סטיות התקן הגלומות באופציות הנסחרות. הוא המיר את מחירי האופציות לסטיות תקן גלומות תוך שימוש בנוסחת בלק ושולס[16] והחליק את סטיות התקן בעזרת פולינום ממעלה שנייה של שערי המימוש. בעזרת פולינום זה חישב סטיות תקן גלומות רציפות וללא הטיות לכל שער מימוש הנמצא בטווח הקיים של שערי המימוש, והמיר אותן בחזרה למחירים. המרת מחירי האופציות לסטיות תקן גלומות והמרתם בחזרה בעזרת נוסחת בלק ושולס מהווה בסיס להחלקת הטעויות בדגימת מחירי האופציות וקביעת ערכי ביניים. אין בה הנחה סמויה שמודל בלק ושולס נכון (ראה גם Bahra, 1997).

Malz (1997) התבסס על שיטתו של Shimko (1993) להחלקת מחירי האופציות, אולם הוא החליק את סטיות התקן הגלומות בעזרת פונקציה ריבועית של שיעור השינוי של מחיר האופציה ביחס לשיעור השינוי בנכס הבסיס - להלן הדלתא של

---

[13] שיטה אחרת לחישוב התפלגות לטווח זמן קבוע היא חישוב מחירי אופציות סינתטיות על בסיס שתי סדרות אופציות – האחת בטווח פדיון קצר יותר והשנייה בטווח פדיון ארוך יותר, ראה למשל Clews, Panigirtzoglou and Proudman (2000). אולם מפאת היקפי המסחר הדלים יחסית בסדרות האופציות בטווחים הארוכים יותר (ראה חלק ד׳), שיטה זו אינה עדיפה.

[14] Bates (1991) החליק את מחירי האופציות לפי שערי מימוש, אולם שיטה זו לוקה בחסר ביכולת ההחלקה.

[15] אופציות בשערי מימוש נוספים הנמצאים בטווח של שערי המימוש הקיימים.

[16] ראה Black and Scholes (1973). משוואת התמחור על פי בלק ושולס מוצגות בנספח 2.

האופציה. לטענתו, שיטה זו מחליקה את סטיות התקן הנמצאות במרכז ההתפלגות ברגישות גדולה יותר. הדלתאות של מחירי האופציות מודדות את רגישות המחירים לשינויים בנכס הבסיס, ולכן סטיית התקן במרווחי דלתא (במקום במרווחי שערי מימוש) מגדילה את המרווחים בין האופציות בשערי מימוש הקרובים לכסף ומקטינה את המרווחים בין אופציות בשערי מימוש רחוקים מהכסף. לפיכך, שיטה זו מאפשרת גמישות רבה יותר בהחלקת מחירי האופציות הנמצאות במרכז תחום ההתפלגות. גמישות זו מאפשרת מדידה טובה יותר של מרכז ההתפלגות הגלומה במחירי האופציות. אולם, שיטה זו מתאימה במיוחד לנתוני האופציות של המערכת הבנקאית, הנהנות ממגוון רב מאוד של שערי מימוש במרכז ההתפלגות. שיטת החלקה זו, המבוססת על הדלתאות של האופציות, נבחנה במסגרת עבודה זו על נתוני האופציות הנסחרות בבורסה. נמצא כי היא אכן אינה מתאימה לנתוני האופציות הללו ואינה משפרת את טיב ההתאמה בהשוואה להחלקה המבוססת על שערי מימוש.

Campa, Chang, and Reider (1997) בחרו להחליק את סטיות התקן הגלומות ולקבוע ערכי ביניים תוך שימוש בשיטת אמידה המאפשרת גמישות גדולה יותר בתיאור פונקציית סטיות התקן ביחס לשערי מימוש, ולכן גם בתיאור צורת ההתפלגות. שיטה זו נקראת "A natural spline", שיטה המחלקת את טווח שערי המימוש למספר קטעים אשר כל אחד מהם מאופיין על ידי פולינום. הפולינומים השונים נבחרים כך שבנקודות המפגש ביניהם מתקיים שוויון הן בערכן והן בנגזרת הראשונה שלהן.

עבודה זו מיישמת מודל להחלקת מחירי האופציות וקביעת ערכי ביניים, המבוסס על החידושים בספרות שנסקרו לעיל, תוך התאמה לנתוני האופציות הנסחרות בבורסה לניירות הערך בתל-אביב. בהתאם לזאת, החלקת סטיות התקן הגלומות בעבודה זו התבצעו באמצעות פולינום ממעלה שנייה של שערי המימוש, תוך אפשרות לנקודת שבר אחת בסטיות התקן הגלומות, שבה שני הפולינומים הנאמדים שווים וגזירים[17]. נקודת שבר זו אינה ידועה מראש ונקבעת יחד עם מקדמי הפולינום בעזרת פונקציה מטרה, הממזערת את ריבוע הסטיות בין סטיות התקן שהתקבלו ממחירי האופציות שנדגמו לאלו שמתקבלות במשוואת ההחלקה הבאה (ראה נספח 3 לפיתוח המשוואה):

$$(10)\quad \sigma_{(K)} = \alpha + \beta \times K + \gamma_1 \times K^2 + (\gamma_2 - \gamma_1) \times (K - K_0)^2 \times M + \mu_{(K)}$$

[17] נמצא כי ההחלקה של סטיות התקן בעזרת הדלתאות של האופציות (במקום שערי מימוש) לוקה בחוסר רגישות בזנבות ההתפלגות, דבר המשפיע לרעה על טיב ההחלקה של הסטיות הנמצאות גם במרכז ההתפלגות הגלומה של שער החליפין הצפוי. תוצאה אמפירית זו נובעת ממספר המועט יחסית של האופציות הנסחרות בשערי מימוש שונים הנמצאים במרכז ההתפלגות – סביב שער ה-Spot. לעומת זאת, ביישום השיטה הא-פרמטרית על נתוני האופציות של המערכת הבנקאית, אשר להן מגוון רב מאוד של שערי מימוש הנמצאים במרכז ההתפלגות, סביר כי שיטת ההחלקה המומלצת תהיה בעזרת הדלתאות של האופציות עם מספר רב של נקודות שבר.

כאשר:

$\sigma_{(K)}$ – סטיית התקן הממוצעת של אופציית Call ואופציית Put בשער מימוש K.

K – שער המימוש של אופציה.

K_0 – נקודת השבר של משוואת האמידה.

M – משתנה דמי המסווג את האופציות השונות בהתאם לנקודת השבר.

צפוי כי נקודת השבר תתקבל בסביבת שער החליפין של הפורוורד ותשקף התפלגות גלומה המאופיינת בצורה שונה בשני צידיה. ככל שהמקדם לנקודת השבר, (γ_2-γ_1), מובהק יותר כך שני צידי ההתפלגות יהיו שונים יותר, דבר המשקף א-סימטריה בהתפלגות הציפיות. כאשר המקדם לנקודת השבר אינו מובהק - דבר המעיד כי סטיות התקן בשערי המימוש השונים מאופיינות על ידי פולינום אחד ללא נקודת שבר - ההתפלגות הגלומה תאופיין בצורה דומה בשני צידיה ותשקף התפלגות סימטרית של הציפיות. לפיכך, ניתן לומר כי שיטת החלקה זו של סטיות התקן מאפשרת מגוון רחב מאוד של התפלגויות סימטריות וא-סימטריות.

במסגרת עבודה זו לא נעשה ניסיון להערכת מחירי אופציות מחוץ לטווח שערי המימוש הנדגמים. לכן, זנבות ההתפלגות אינם ידועים - דבר המקשה לחשב מספר פרמטרים המאפיינים את צורת ההתפלגות. אלטרנטיבית, ניתן להניח כי סטיית התקן בקצוות ההתפלגות - מחוץ לטווח שערי המימוש הקיימים - הינה פונקציה שטוחה, בדומה להנחתם של Shimko (1993)‏, Campa Chang, and Reider (1997)‏, ו- Bliss and Panigirtzoglou (2002). אולם הנחה זו, להערכתי, אינה נתמכת בממצאים האמפיריים ויתרה מכך, היא מאלצת את סטיות התקן הנמצאות בקצוות הטווח הקיים של שערי המימוש להתנהג בהתאם להנחה זו. נדגיש כי, גם כאשר זנבות ההתפלגות אינם ידועים, ניתן לחלץ מספר פרמטרים המתארים את צורת ההתפלגות בצורה פרטנית.

ה.3. יישום אמפירי – הלכה למעשה

ליישום ההתפלגות הגלומה באופציות בשערי מימוש שונים על פי שיטת החישוב הא-פרמטרית ובהתאם לבעיות הנתונים שהועלו לעיל, נחשב ונאמוד מספר משוואות לפי הסדר הבא:

1) משוואת אמידה המחלצת את הריבית השקלית והריבית הדולרית הטמונות באופציות. משוואה זו מתבססת על נוסחת Put Call Parity (ראה נספח 1).

2) משוואות, המתבססות על נוסחת בלק ושולס, לחילוץ סטיית התקן הגלומה באופציות בשערי מימוש שונים (ראה נספח 2).

3) משוואת אמידה א-פרמטרית להחלקת סטיות התקן הגלומות ולקביעת ערכי ביניים – אופציות במרווחים של אגורה אחת בין שערי המימוש השונים. (משוואה 10, ראה נספח 3).

4) משוואות המחלצות (חזרה) את מחירי האופציות המוחלקות בשערי מימוש שונים. לשם כך נציב במשוואות מסעיף 2 את סטיות התקן המוחלקות (המתקבלות מסעיף 3) ונחשב את המחירים של האופציות בפערים קבועים של שערי מימוש – אגורה אחת – ולטווח פדיון קבוע – 30 יום – להלן אופציות סינתטיות.

בהינתן מחירי האופציות הסינתטיות בשערי מימוש שונים – על בסיס סטיות התקן המוחלקות - הנגזרת הראשונה של המחיר ביחס לשער המימוש מהווה בסיס לחישוב ההתפלגות המצטברת של נכס הבסיס, ראה משוואה 8. על פי משוואה זו, ניתן לחלץ את נוסחת החישוב להתפלגות המצטברת על ידי העברת אגפים, כלהלן:

$$(11)\quad F(S_T,\tau \mid S_T = K) = \frac{e^{r\tau} \times \partial c(K,\tau)}{\partial K} + 1$$

נשכתב משוואה 11 כך שתותאם לנתוני האופציות הסינתטיות, לאחר החלקת מחיריהם וקביעת ערכי ביניים:

$$(12)\quad P(S_T < \frac{K_i + K_{i-1}}{2}) = 1 + \frac{e^{r\tau} \times [c(K_i,\tau) - c(K_{i-1},\tau)]}{(K_i - K_{i-1})}$$

כאשר:

S_T – שער החליפין שקל-דולר ידוע.

$C(K_i,\tau)$ – מחיר אופציית Call לדולר אחד בשער מימוש של K_i ובטווח פדיון τ - העומד על 30 יום.

K_i – שער המימוש; כאשר $K_{i-1}<K_i$, ו- $\Delta K_i = 0.01$ (אגורה אחת).

r – ריבית שקלית המתאימה ל-30 יום.

ההתפלגות הגלומה באופציות מטבע חוץ, כפי שמוצגת בפרק התוצאות, הינה פונקציית צפיפות א-פרמטרית, המחושבת על בסיס הפערים של ההתפלגות המצטברת, והיא מחושבת בהתאם להפרשים של שערי המימוש של האופציות הסינתטיות שהוזכרו לעיל. על בסיס שיטת חישוב זו ניתן לחשב אומדני ציפיות ואומדני סיכון, המשקפים ביתר פירוט את ציפיות הציבור לגבי התפתחות עתידית של שער החליפין שקל-דולר.

ו. תוצאות המודל

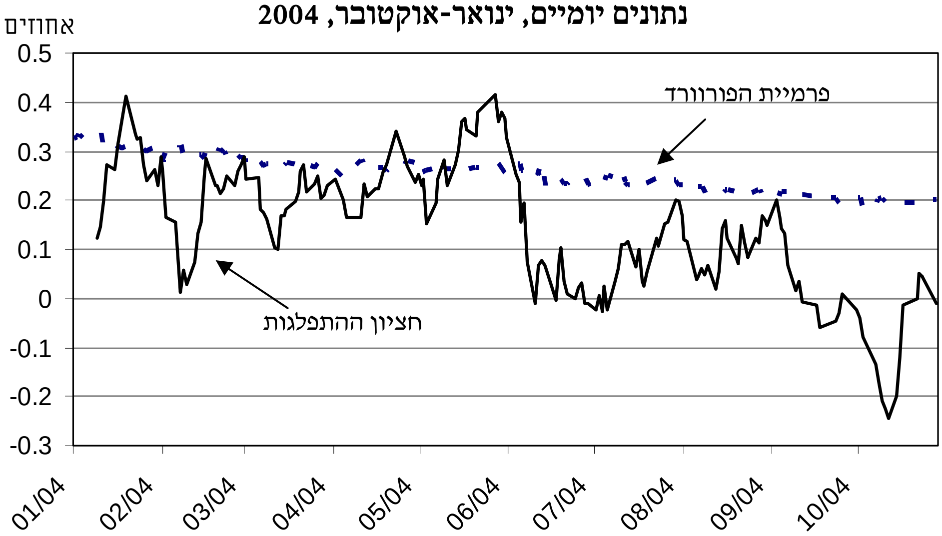
בפרק זה נראה כיצד האינפורמציה הגלומה בהתפלגות הצפויה של השינויים בשער החליפין יכולה לשמש כלי בניתוח ההתפתחויות העתידיות של שער החליפין[18]. במסגרת עבודה זו נבחנו מספר דוגמאות של ההתפלגות הצפויה בתאריכים שהתרחשו בהם אירועים מרכזיים, וחושבו מספר מדדים סטטיסטיים המשקפים את פונקציית ההתפלגות. מדדים אלו משקפים את מבנה הציפיות של המשקיעים לשינוי העתידי של שער החליפין שקל-דולר. נוסף על כך, ניתן להשוות את החציון של ההתפלגות, המהווה את אחד האומדנים לשינוי הצפוי בשער החליפין, לפרמיית הפורוורד, המתקבלת מהפער שבין הריבית השקלית לריבית הדולרית. השוואה זו נעשית בהנחה שעיקרון UIP מתקיים, ולפיו פרמיית הפורוורד מייצגת את האומדן לשינוי הצפוי בשער החליפין – תוחלת השינוי. לעומת זאת, Fama (1984)، Taylor (1995) ושטיין (2003) טענו כי פרמיית הפורוורד מהווה אומדן מוטה לשינוי הצפוי. זאת מכיוון שכלולה בה גם פרמיית הסיכון הגלומה בשער החליפין. לפיכך, כטענתם, יש לנכות את פרמיית הסיכון מפער הריביות כדי לאמוד את השינוי הצפוי בשער החליפין ללא הטיות. במסגרת עבודה זו נבחן חציון ההתפלגות, המשקף אומדן לשינוי הצפוי המתקבל מההתפלגות הנאמדת, והושווה לפרמיית הפורוורד, בה כלולה כאמור פרמיית סיכון. השוואה כזו מאפשרת לחשב את הערכים הבאים: (1) הפער הממוצע בין שני אומדני ציפיות אלו - פער המצביע על קיום פרמיית סיכון בפרמיית הפורוורד. (2) הפערים המשתנים על פני זמן - פערים המצביעים על א-סימטריה בציפיות ומלמדים על הציפיות לגבי מהלכו העתידי של שער החליפין. בציור 2 מוצגים נתונים יומיים של חציון ההתפלגות ופרמיית הפורוורד, בתקופה ינואר-אוקטובר 2004.

מחישוב הממוצע של שני אומדנים אלו מתקבל כי פרמיית הפורוורד עמדה בעשרת החודשים הראשונים של 2004 על 0.26 אחוז. זאת לעומת חציון ההתפלגות שעמד על 0.14 אחוז בממוצע. פער זה מחזק את המסקנה כי פרמיית הפורוורד כוללת פרמיית סיכון ומהווה אומדן מוטה כלפי מעלה לתוחלת שער החליפין. נוסף על כך, ניתן לראות בציור 2 כי בחמשת החודשים הראשונים של 2004 חציון ההתפלגות נע סביב פרמיית הפורוורד ולא נפתח פער עקבי לאורך זמן. לעומת זאת מחודש יוני 2004 ובמיוחד בחודש אוקטובר חציון ההתפלגות היה קטן מפרמיית הפורוורד באופן

[18] מהימנות האינפורמציה הגלומה במחירי האופציות נבחנה רבות בספרות המקצועית. ישנם מאמרים הבודקים את יציבות ההתפלגות הגלומה תוך שימוש מבוקר בטעויות המדידה של מחירי האופציות, ראה למשל Bliss and Panigirtzoglou (2002) וישנם הבודקים את ההתפלגות הגלומה מול התפלגות השינויים של נכס הבסיס, ראה למשל Aït-Sahalia, Wang and Yared (2001). במסגרת עבודה זו לא נערכו בדיקות למהימנות ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר כפי שמחושבת בעבודה זו ומוצגת בפרק תוצאות המודל.

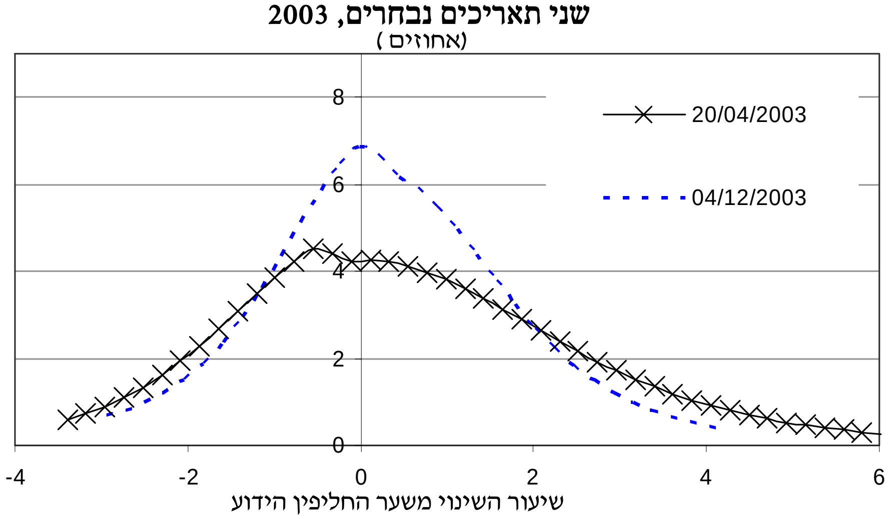
מובהק ולעתים אף שלילי. ממצא זה מצביע על א-סימטריה בציפיות, כלומר מסת ההתפלגות התרכזה סביב ציפיות לשינוי שער החליפין, הקטן מהשינוי הנגזר מפער הריביות, ובחודש אוקטובר התרכזה אף סביב ייסוף שער החליפין.

ציור 2
חציון ההתפלגות ופרמיית הפורוורד
נתונים יומיים, ינואר-אוקטובר, 2004



להלן מספר דוגמאות למידע שניתן לגזור מהאופציות לגבי השינוי הצפוי בשער החליפין שקל-דולר לטווח של 30 יום, בשישה תאריכים נבחרים בהם התרחשו אירועים מרכזיים:

ציור 3
ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין שקל-דולר
שני תאריכים נבחרים, 2003



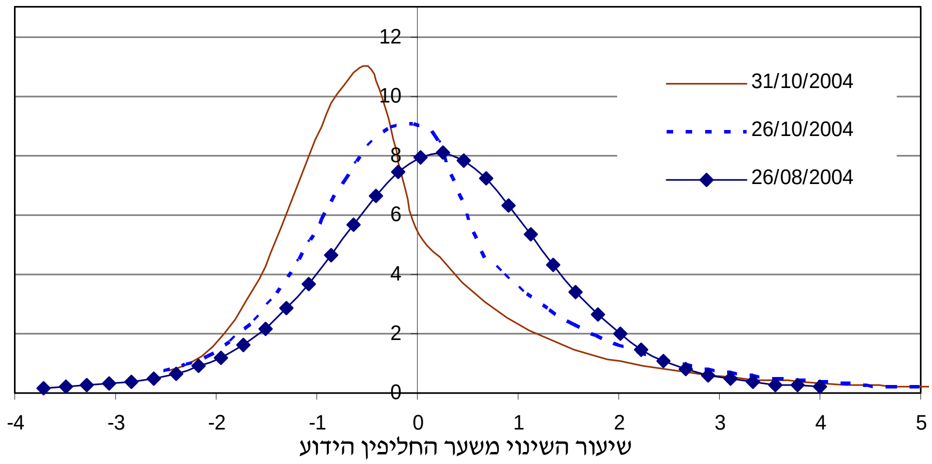
1. ב-20 באפריל 2003, כשבועיים לאחר הפלת המשטר בעיראק על ידי צבא ארה"ב והמשך הלחימה, ונוכח פיגועי הטרור בארץ, שער החליפין שקל-דולר באותה תקופה נע בטווח רחב יחסית – 4.9 - 4.5 שקל לדולר. ההתפלגות הגלומה התאפיינה ברמת אי-ודאות גבוהה מאוד סביב שער החליפין שקל-דולר הידוע (ציור 3). בעוד שחציון ההתפלגות משקף פיחות של 0.3 אחוזים, השינוי השכיח ביותר שיקף ייסוף של 0.2 אחוזים. יחד עם ציפיות אלו, ההסתברות לשינוי השכיח ביותר, המהווה אומדן לרמת הוודאות לגבי אומדני הציפיות, היה נמוך מאוד ועמד על 4.4 אחוזים (לוח 1). בנוסף, ניתן לראות כי הזנב הימני של ההתפלגות עבה מזנבה השמאלי – דבר המעיד כי ההסתברות לפיחות חד יחסית נותרה גבוהה; ההסתברות לפיחות של יותר משלושה אחוזים עומדת על 12.9 אחוז, וההסתברות לייסוף של יותר משני אחוזים עומדת על 10.4 אחוזים.
2. ב-4 בדצמבר 2003, לאחר שסימנים ראשונים בישרו על התאוששות בפעילות הכלכלית המקומית והעולמית, על רגיעה יחסית באירועים הביטחוניים ועל ייסוף מתון בשער החליפין שקל-דולר ל-4.4 ש"ח לדולר, אופיינה ההתפלגות ברמת אי-ודאות נמוכה יחסית לאותה תקופה ולשנת 2003 כולה (ציור 3): חציון ההתפלגות עמד על 0.3 אחוז ואילו השינוי השכיח ביותר שיקף אי-שינוי בשער, תוך עלייה באומדן לרמת הוודאות – 6.8 אחוז. במקביל לציפיות אלו ההסתברות לשינויים חדים פחתה מאוד: ההסתברות לפיחות של יותר משלושה אחוזים עמדה על 5 אחוזים, וההסתברות לייסוף של יותר משני אחוזים עמדה על 5.2 אחוזים (לוח 1). התפלגות זו משקפת אי-וודאות נמוכה יחסית בציפיות לשינוי אפשרי בשער החליפין, הצפוי להיות בדומה לפער הריביות באותה התקופה – שלוש עשיריות האחוז.

ציור 4

ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין שקל-דולר

שלושה תאריכים נבחרים, 2004

(אחוזים)



3. ב-26 באוגוסט 2004, לאור רגיעה ממושכת בשער החליפין שקל-דולר במהלך שנת 2004 ולאחר פיחות מתון בשער החליפין שקל-דולר לרמה של 4.52 ש״ח לדולר, ההתפלגות הייתה סימטרית, כאשר חציון ההתפלגות והשינוי השכיח ביותר הצביעו על פיחות קל של שתי עשיריות האחוז, בדומה לפער הריביות באותה התקופה (ציור 4). ההסתברות לשינויים חדים יחסית הייתה נמוכה יחסית: ההסתברות לפיחות של שלושה אחוזים ויותר עמדה על 1.6 אחוזים בלבד וההסתברות לייסוף של שני אחוזים ויותר עמדה על 3.8 אחוזים (לוח 1).
4. ב-26 באוקטובר 2004, לפני ההצבעה בכנסת על תוכנית ההתנתקות מחבל עזה, שער החליפין הגיע לרמתו הנמוכה ביותר בחודשים האחרונים, מרכז ההתפלגות נטה לכיוון ייסוף קל, כאשר השכיח ביותר וחציון ההתפלגות הצביעו על ייסוף של עשירית האחוז (ציור 4). האומדן לרמת הוודאות עלה במעט ומשקף רמת אי-ודאות נמוכה יותר לייסוף מתון בשער החליפין שקל-דולר. יחד עם מגמה זו, ההסתברות לפיחות חד –יותר משלושה אחוזים – עלתה והגיעה ל-5.2 אחוזים ואילו ההסתברות לייסוף חד יחסית –יותר משני אחוזים – ירדה במעט והגיעה ל-3.1 אחוזים (לוח 1).
5. ב-31 באוקטובר 2004, יחד עם אישור תוכנית ההתנתקות, איומי פרישה מצד חברי הקואליציה מהממשלה, ופרסום מחלתו של ראש הרשות הפלשתינית, התפלגות הציפיות לשינויים בשער החליפין שקל-דולר נטתה להמשך ייסוף, תוך הסתברות גדלה והולכת לפיחות חד יחסית בשער החליפין (ציור 4). תקופה זו התאפיינה במגוון רב של התרחשויות אפשריות. ניתן לראות שההסתברות לשינויים חדים, הן לייסוף והן לפיחות, עלתה (לוח 1). יחד עם זאת, ניתן לראות כי האומדן לרמת הוודאות המשיך לעלות והגיע ל-11 אחוזים, דבר המשקף כי במקביל לקיומם של תרחישים קיצוניים יחסית במשק הישראלי המשקל להתרחשותם קטן יחסית.

לוח 1

נתונים סטטיסטיים - ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין
(אחוזים)

	חציון	השינוי השכיח ביותר	ההסתברות לשינוי השכיח ביותר	הסתברות לייסוף חד	ההסתברות לפיחות חד
24/04/03	0.3	-0.2	4.4	10.4	12.9
04/12/03	0.3	0.0	6.8	5.2	5.0
26/08/04	0.2	0.2	8.1	3.8	1.6
26/10/04	-0.1	-0.1	9.1	3.1	5.2
31/10/04	-0.4	-0.5	10.9	2.9	7.6

ז. סיכום והמלצות

עבודה זו מציגה שיטה פשוטה יחסית לחישוב ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר בהתבסס על המסחר באופציות שקל-דולר בבורסה לניירות ערך בתל-אביב - אופציות הזהות בטווחי הפדיון ושונות בשערי המימוש. התפלגות שער החליפין, כפי שצופים אותה השווקים, משתקפת היטב במחירי האופציות בשערי מימוש שונים, וזאת מפני הרגישות הגבוהה של מחיריהן להתפתחויות הצפויות בשווקים הפיננסיים.

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר מחושבת בעבודה זו על בסיס הטענה האלמנטרית (elementary claim), המשתקפת בנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. שיטה זו ידועה בספרות המקצועית כשיטת אמידה א-פרמטרית של ההתפלגות, שכן בחישוב זה אין הנחה לגבי צורת ההתפלגות ולגבי התהליך הסטוכסטי של שער החליפין שקל-דולר. שיטה זו מאפשרת גמישות מרבית בקביעת צורת ההתפלגות ואינה מגבילה את צורת ההתפלגות לפונקציה מסוימת. בניתוח ההתפלגות ניתן ללמוד על ציפיות הציבור לגבי מהלך עתידי של שער החליפין ולחשב את חציון ההתפלגות וכן את ההסתברויות השונות לפיחות/ייסוף בשיעורים קבועים. כאשר חציון ההתפלגות שונה באופן מובהק מפרמיית הפורוורד, שהיא תוחלת שער החליפין, ניתן ללמוד כי הציפיות מאופיינות בא-סימטריה וכי מסת ההתפלגות מצביעה על שינוי שער החליפין השונה מתוחלתו. בחינה זו של האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך מאפשרת אפוא ללמוד על התפתחותו הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, ובכך משפרת את ניתוח ההתפתחויות בשוק מטבע החוץ. שימוש במתודולוגיה זו על נתוני האופציות הנסחרות על מדד המניות תל-אביב 25 תאפשר לגזור את ההתפלגות הצפויה של מדד המניות.

נספח 1 - חילוץ ריבית שקלית ודולרית מתוך האופציות בשערי מימוש שונים

נוסחת Put Call Parity מגדירה כי הסכום של מחיר אופציית Call (בשער מימוש K) ו-K שקלים, מהוון בריבית השקלית, שווה לסכום של מחיר אופציית Put (בשער מימוש K) ושער הדולר מהוון בריבית הדולרית. ההנחה בבסיס הנוסחה - שוק הון משוכלל ועמוק דיו.

$$C(K) + \beta * K = \alpha + P(K) \qquad (1)$$

כאשר C(K) ו-P(K) הינם מחירי האופציות Call ו-Put בשערי מימוש K, המקדם α מייצג את שער הדולר מנוכה ריבית דולרית לתקופת חיי האופציות. המקדם β מייצג את גורם ההיוון המתחשב בריבית השקלית לתקופת חיי האופציות.

נעביר אגפים ונסדר את הנוסחה למשוואת אמידה:

$$C(K) - P(K) = \alpha - \beta * K + U \qquad (2)$$

כאשר α הינו החותך במשוואת האמידה והוא משקף את שער הדולר המהוון בריבית הדולרית לתקופה המתאימה, כפי שבא לידי ביטוי במחירי האופציות, β הינו השיפוע של משוואת האמידה והוא משקף את הריבית השקלית לצורך היוון שער המימוש הנקוב בשקלים למשך חיי האופציה. U הינו הטעות המקרית.

בהינתן תוצאות אמידת נוסחת Put Call Parity ושער החליפין שקל-דולר, שנדגם בזמן דגימת מחירי האופציות, ניתן לחלץ את הריבית השקלית והדולרית בכל יום מסחר, כלהלן:

$$rf = \left(\frac{Spot}{\alpha}\right)^{\frac{365}{t}} - 1 \tag{3}$$

$$rd = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{365}{t}} - 1 \tag{4}$$

נספח 2 – המרת מחירי אופציות לסטיות תקן וחזרה

בהינתן מחירי האופציות בשערי מימוש שונים, שער הדולר הידוע, והריבית השקלית והדולרית (שחולצו בעזרת נוסחת Put Call Parity, ראה נספח 1), ניתן להציב בנוסחאות תמחור האופציות של בלק ושולס ולחלץ את סטיית התקן הגלומה באופציות. חילוץ סטיית התקן הגלומה מתבצע תוך ההתאמה הטובה ביותר בין מחירי האופציות השונות שנדגמו - אופציות Put ו-Call בשערי המימוש השונים לבין המחירים המתקבלים בנוסחאות התמחור, שלהלן:

(1) $C(K,\tau) = St * e^{-rf*\tau} * N(d1) - N(d2) * K * e^{-rd*\tau}$

(2) $P(K,\tau) = N(-d2) * K * e^{-rd*\tau} - St * e^{-rf*\tau} * N(-d1)$

כאשר:

$d1 = (Log(St / K) + (rd - rf + (z^2) / 2) * \tau) / (z * \tau^{0.5})$

$d2 = d1 - (z * \tau^{0.5})$

$C(K,\tau)$ – ערכה של אופציית Call בעלת שער מימוש K וטווח פדיון τ, St – שער הדולר, rd – ריבית שקלית, rf – ריבית דולרית, z – סטיית תקן גלומה, ו-N() – ההתפלגות המצטברת עד לערך בסוגריים בהינתן התפלגות נורמלית סטנדרטית.

חישוב מחירי האופציות הסינטטיות, לאחר החלקת סטיות התקן הגלומות, יתבצע תוך שימוש פשוט במשוואות 1-2; הצבת כל הפרמטרים כולל סטיות התקן המוחלקות (משוואה מס. 10, בגוף העבודה) וחישוב מחירי האופציות בטווח פדיון קבוע ובשערי מימוש במרווחים של אגורה אחת, להלן אופציות סינטטיות.

נספח 3 – פיתוח משוואת האמידה להחלקת סטיית התקן הגלומה

בחלק זה נציג את פיתוח המשוואה לצורך החלקת סטיות התקן הגלומות באופציות בשערי מימוש שונים. המשוואה הינה פולינום מדרגה שנייה של סטיות התקן הגלומות ביחס לשערי המימוש ובעלת נקודת שבר אחת. משוואה זו חייבת להיות רציפה וגזירה, כדי שתאפשר להמיר את סטיות התקן למחירי אופציות (בשערי מימוש שונים) רציפים וגזירים. בהתאם לכך, נוסיף למשוואה הבסיסית שני אילוצים העונים לקריטריונים אלו.

להלן המשוואה הבסיסית להחלקת סטיות התקן המאופיינת בנקודת שבר אחת:

(1) $\sigma_{(K)} = (\alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2) * (1\text{-}M) + (\alpha_2 + \beta_2 * K + \gamma_2 * K^2) * M$

M = 0

If K <= K_0 Then M = 1

כאשר $\sigma_{(K)}$ ו- K הם סטיית התקן הגלומה בשער מימוש K – אופציות Call ואופציות Put בממוצע - ושער המימוש של אופציה, ו-M הנו משתנה דמי אשר מקבל ערך של 0 כאשר K קטן מ-K_0 וערך של אחד כאשר K גדול ושווה ל-K_0.

אילוץ מספר אחד: רציפות הפונקציה בנקודת השבר (K_0)

(2) $\alpha_1 + \beta_1 * K_0 + \gamma_1 * K_0^2 = \alpha_2 + \beta_2 * K_0 + \gamma_2 * K_0^2$

(2.1) $\alpha_2 - \alpha_1 = (\beta_1 - \beta_2) * K_0 + (\gamma_1 - \gamma_2) * K_0^2$

אילוץ מספר שתיים: רציפות נגזרת הפונקציה בנקודת השבר (K_0)

(3) $\beta_1 + 2 * \gamma_1 * K_0 = \beta_2 + 2 * \gamma_2 * K_0$

(3.1) $\beta_2 - \beta_1 = (\gamma_1 - \gamma_2) * 2 * K_0$

פיתוח משוואה 1:

(1.1) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) * M + (\beta_2 - \beta_1) * K * M + (\gamma_2 - \gamma_1) * K^2 * M$

הצבה של אילוץ הראשון (2.1) במשוואה 1.1 ופיתוח המשוואה:

(4) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + [(\beta_1 - \beta_2) * K_0 + (\gamma_1 - \gamma_2) * K_0^2] * M + (\beta_2 - \beta_1) * K * M + (\gamma_2 - \gamma_1) * K^2 * M$

(4.1) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + [(\beta_2 - \beta_1) * (-K_0) + (\gamma_2 - \gamma_1) * (-K_0^2)] * M + (\beta_2 - \beta_1) * K * M + (\gamma_2 - \gamma_1) * K^2 * M$

(4.2) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + (\beta_2 - \beta_1) * (K - K_0) * M + (\gamma_2 - \gamma_1) * (K^2 - K_0^2) * M$

הצבה של האילוץ השני (3.1) במשוואה 4.2 ופיתוח המשוואה:

(5) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + [(\gamma_1 - \gamma_2) * 2 * K_0] * (K - K_0) * M +$
$(\gamma_2 - \gamma_1) * (K^2 - K_0^2) * M$

(5.1) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + (\gamma_2 - \gamma_1) * (K^2 - 2 * K_0 * K + K_0^2) * M$

משוואת האמידה להחלקת סטיות התקן לפי שערי מימוש:

(5.2) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + (\gamma_2 - \gamma_1) * (K - K_0)^2 * M$

ביבליוגרפיה

הכט, י׳ ור׳ שטיין (2004), ״אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר הגלומה במחירי האופציות״, *רבעון לכלכלה 51*, מס׳ 1, 36-60.

שטיין, ר׳ (2003), ״אמידת שער החליפין הצפוי באמצעות אופציות CALL על שער ה- FORWARD״, *סוגיות בבנקאות 16*, 53-71.

Aït-Sahalia, Y. and A. Lo (1998). "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices", *Journal of Finance 53*, 499-547.

Aït-Sahalia, Y., Y. Wang and F. Yared (2001). "Do Option Markets Correctly Price the Probabilities of Movements of the Underlying Asset?", *Journal of Econometrics* 102, 67-110.

Arrow, K. J. (1964). "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", *Review of Economic Studies 31 No. 2,* 91-96.

Bahra, Bhupinder (1997). *Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application*, Bank of England 1997.

Bates, D. S. (1991). "The Crash of '87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets", *Journal of Finance, 46 (3*), 1009-1044.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy, 81*, 637-659.

Bliss, R. Robert and N. Panigirtzoglou (2002). "Testing the Stability of Implied Probability Density Functions", *Journal of Banking and Finance 26*, 381-422.

Breeden, D. and R. Litzenberger (1978). "Prices of State Contingent Claims Implicit in Options Prices", *Journal of Business 51*, 621-651.

Campa, J.M., P.H.K. Chang and R.L. Reider (1997). "ERM Bandwidths for EMU and After: Evidence from Foreign Exchange Options", *Economic Policy 24*, 55-89.

Clews, R. N. Panigirtzoglou and J. Proudman (2000). “Recent Developments in Extracting Information from Option Markets”, *Bank of England Quarterly Bulletin*, 50-60.

Cox, J. and S. Ross (1976). "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics 3*, 145-66.

Debreu, G. (1959). *Theory of Valu*e, New York: Wiley.

Fama, E. F. (1984). “Forward and Spot Exchange Rates”, *Journal of Monetary Economics 14*, 319-338.

Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, & Other Derivatives*, Prentice Hall (4th edition)

Jackwerth, J. C. and M. Rubinstein (1996). "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance 51*, 1611-1631.

Malz, A. (1997). "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices", *The Journal of Derivatives (Winter)*, 20-36.

Melick, W. R. and C. P. Thomas (1997). "Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis 32*, 91-115.

Shimko, D (1993). "Bounds of Probability"*, Risk 6, No. 4*.

Taylor, M.P. (1995). "The Economics of Exchange Rates", *Journal of Economic Literature 33(1),* 13-47.