עיונים מוניטריים
Monetary Studies

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר

התפלגות א-פרמטרית הגלומה באופציות מטבע חוץ

רועי שטיין

דצמבר 2004 2004.04

מאמרים לדיון Discussion Papers

Bank of Israel
Monetary
Department

בנק ישראל
המחלקה
המוניטרית

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר
התפלגות א-פרמטרית הגלומה באופציות מטבע חוץ

רועי שטיין

דצמבר 2004 2004.04

רועי שטיין, המחלקה המוניטרית, דואל: roy_s@boi.gov.il

הדעות המובעות במאמר זה אינן משקפות בהכרח את עמדת בנק ישראל. טעויות, אם נפלו בעבודה, הן של הכותב בלבד.

מחלקה מוניטרית, בנק ישראל ת״ד 780 ירושלים 91007
מס׳ קטלוגי 3111504004/5
http://www.bankisrael.gov.il

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר

התפלגות א-פרמטרית הגלומה באופציות מטבע חוץ

רועי שטיין*

תקציר

עבודה זו מציגה שיטה א-פרמטרית לחישוב ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר בהתבסס על מחירי אופציות שקל-דולר הנסחרות בבורסה לניירות ערך בתל-אביב. התפלגות שער החליפין, כפי שצופים אותה השווקים, משתקפת היטב במחירי האופציות בשערי מימוש שונים, וזאת מפני הרגישות הגבוהה של מחיריהן להתפתחויות הצפויות בשוק מטבע-החוץ.

אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר מתבססת בעבודה זו על "הטענה האלמנטרית" (elementary claim) המתבטאת בנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. אמידת ההתפלגות נעשית ללא הנחה לגבי צורת ההתפלגות ואו לגבי התהליך הסטוכסטי של שער החליפין, שיטה הידועה כשיטת אמידה א-פרמטרית של ההתפלגות. יתרונה של שיטת אמידה זו על פני השיטה הפרמטרית הוא בגמישות הרבה של צורת ההתפלגות שאינה מוגבלת על ידי פונקצית התפלגות כלשהי. מניתוח ההתפלגות הצפויה, המכילה מידע מפורט לגבי ציפיות ציבור המשקיעים, ניתן ללמוד על ההתפתחויות העתידיות בשוק מטבע-חוץ וכן על ההסתברויות השונות לשינויים חריגים יחסית הצפויים להתממש בשער החליפין.

מילות מפתח: שער חליפין, אופציות, התפלגות א-פרמטרית, ציפיות, מדדי סיכון.

---

* בנק ישראל, המחלקה המוניטרית. דואל: roy_s@boi.gov.il
תודה לחברי המחלקה המוניטרית של בנק ישראל שהשתתפו בסמינר המחלקתי, ליואל הכט מיחידת המחקר של הפיקוח על הבנקים על הערותיו המועילות ובמיוחד להלנה פומפושקו מהמחלקה המוניטרית בבנק ישראל על עזרתה בישום האלגוריתמים ב-SAS.

א. מבוא ומוטיבציה

אומדני הציפיות של הציבור, המתקבלים ממחירי הנכסים הפיננסים, מהווים בסיס לניתוח ההתפתחויות המוניטריות ותנועות ההון של הסקטור הפרטי. אחת השאלות המרכזיות לגבי אומדני ציפיות אלו, המשקפים את ממוצע הציפיות של כלל ציבור המשקיעים, היא מהי רמת אי-הוודאות הקיימת בהם. במידה ורמת אי-הוודאות קטנה, הרי שטווח הציפיות צר יחסית וממוצע הציפיות ישקף במידה טובה את ציפיות כלל ציבור המשקיעים. לעומת זאת, במידה ורמת אי-הוודאות גדולה, הרי שטווח הציפיות רחב יחסית וישנן ציפיות השונות מאוד מהממוצע. במקרה זה יהווה ממוצע הציפיות אומדן פחות טוב לציפיות כלל ציבור המשקיעים. אם כן, אמינותו של ממוצע הציפיות כאומדן לציפיות הציבור תלויה ברמת אי-הוודאות - המשתקפת בסטיית התקן של ממוצע הציפיות. יתרה מכך, מניתוח אומדני הציפיות בעזרת מחירי האופציות ניתן לגזור לא רק את ממוצע הציפיות וסטיית התקן של הממוצע, המייצגים את שני המומנטים הראשונים בהתפלגות הצפויה, אלא גם מומנטים גבוהים יותר, המשתקפים בצורת ההתפלגות כולה. בחינה כזו, תאפשר לחשב גם את מידת הא-סימטריה של הציפיות וכן את ההסתברות לשינויים חריגים יחסית הצפויים להתממש בשער החליפין.

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין, המכילה מידע מפורט לגבי ציפיות ציבור המשקיעים, מקנה מידע חשוב בגיבוש המדיניות המוניטרית. זאת, במיוחד במשקים קטנים ופתוחים, כדוגמת המשק הישראלי, שבהם ישנו קשר סטטיסטי הדוק וחיובי בין האינפלציה לבין השינויים בשער החליפין. קשר זה צפוי להתקיים גם בין הציפיות לשינויים בשער החליפין לבין הציפיות האינפלציוניות. מכאן חשיבותו של המידע הטמון בהתפלגות הצפויה של שער החליפין בגיבוש המדיניות המוניטרית.

בספרות המקצועית מציינים מספר שיטות לחישוב ההתפלגות הצפויה של מחיר נכס פיננסי כלשהו על בסיס מחירי האופציות בשערי מימוש שונים סביב מחיר אותו הנכס. חלקן, מניחות פונקצית התפלגות כלשהי ואומדות את הפרמטרים של הפונקציה על ידי התאמה (Best Fit) בין מחירי האופציות בפועל לבין מחיריהן התיאורטיים; כאשר המחירים התיאורטיים נקבעים על פי נוסחה לתמחור אופציות הכוללת בתוכה הנחות לגבי פונקצית ההתפלגות או לגבי מהלכו של נכס הבסיס. שיטות אלו נקראות שיטות פרמטריות, ומובנה בתוכן מספר פרמטרים, המכתיבים את צורת ההתפלגות (למשל, הכט ושטיין 2004). יתרונן של שיטות אלו טמון במידע הרב אשר ניתן לגזור מהן, כדוגמת ארבעת המומנטים הראשונים של ההתפלגות. אולם חסרונן טמון בשיטת האמידה עצמה, המגבילה את פונקצית ההתפלגות הנאמדת כך שתותאם למסגרת ההנחות שבבסיסה. שיטה שנייה, שהיא פשוטה יותר, גוזרת את ההתפלגות ללא הנחות לגבי פונקצית ההתפלגות או לגבי התהליך הסטוכסטי של נכס הבסיס. שיטה זאת מבוססת על הרגישות של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש שלהן בתאריכי פדיון זהים. שיטת גזירה זו נקראת שיטה א-פרמטרית – ללא צורך במשוואה לתמחור אופציות. במסגרת מאמר זה נציג את ההסבר האינטואיטיבי והמתמטי בגזירת ההתפלגות בשיטה הא-פרמטרית, נייַשם שיטה זו ונאמוד את ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, בעזרת האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך.

ב. מתודולוגיה

גזירת ההתפלגות הצפויה בשיטת אמידה א-פרמטרית מבוססת על הטענה האלמנטרית (elementary claim), אשר הוצגה לראשונה על ידי Arrow (1964) ו- Debreu (1959), וידועה בספרות המקצועית כ- Arrow-Debreu-Security. נכס אלמנטרי מוגדר כנכס המניב יחידה אחת של כסף במידה ונכס הבסיס שווה בזמן הפדיון לערך מסוים שנקבע מראש, ואפס אחרת. מחירו של נכס זה ימצא בטווח שבין אפס לאחד. כאשר המאורע המיוצג על ידי הנכס האלמנטרי צפוי להתרחש באופן ודאי, מחירו יהיה שווה לאחד, או לכל הפחות ישאף לאחד, שהרי תזרים המזומנים הצפוי לנבוע ממנו הוא יחידה אחת של כסף. אולם, כאשר המאורע המיוצג על ידי הנכס צפוי לא להתרחש באופן וודאי, מחירו יהיה נמוך ואף ישאף לאפס. אלו שני המקרים הקיצוניים בקשת האפשרויות של מחיר הנכס האלמנטרי, הנקבע על פי ההסתברות שהמאורע אכן יתממש. בין שני מקרי קיצון אלו ישנה קשת רחבה של הסתברויות להתממשות המאורע ומחירי הנכסים האלמנטרים ינועו בטווח שבין אפס לאחד בהתאם להסתברויות אלו. מכאן, בהנחה שציבור המשקיעים אדיש לסיכון[1], מחיר הנכס האלמנטרי ישקף את ההסתברות למימושו. בעולם שבו קיימת אי-וודאות לגבי שינויים עתידיים במחירו של נכס הבסיס ושקיימים בו אין-סוף נכסים אלמנטריים שתאריכי פדיונם זהה, באין-סוף שערי מימוש שונים, אזי סכום מחירי כל הנכסים יחדיו שווה ליחידה אחת של כסף מהוונת בשיעור הריבית חסרת הסיכון.

נכסים אלמנטריים אינם נסחרים בשווקים הפיננסיים, אולם ניתן להעתיק את מאפייניהם באמצעות שילוב מסוים של מספר אופציות שתאריכי פדיונן זהה, ושערי המימוש שלהן שונים[2]. אופציות, שהן הנכסים הקרובים ביותר לנכסים אלמנטריים, מניבות תזרים מזומנים חיובי בשערי מימוש מסוימים ואפס אחרת. באמצעות עסקה המשלבת מספר אופציות בשערי מימוש שונים, המוכרת כאסטרטגיית "פרפר", ניתן ליצור תיק אשר תשואתו תהיה דומה לנכס אלמנטרי.

להעתקת המאפיינים של נכס אלמנטרי יש לבצע שלוש עסקאות שונות באופציות Call[3] בשערי מימוש K_1, K_2, K_3, כאשר $K_1 < K_2 < K_3$ בפערים קבועים, ומחיריהם נתונים וידועים $C(K_1,\tau), C(K_2,\tau), C(K_3,\tau)$, בהתאמה: קניית אופציה אחת בשער מימוש של K_1, קניית אופציה נוספת בשער מימוש של K_3 ומכירת שתי אופציות בשער מימוש של K_2. עלות אסטרטגיית הפרפר שווה ל -$C(K_3,\tau)+C(K_1,\tau)-2C(K_2,\tau)$, והיא תניב תזרים מזומנים חיובי רק במצב מסוים אחד - מחיר נכס הבסיס יהיה שווה ל-K_2 בעת הפדיון - תזרים מזומנים הדומה במאפייניו לנכס אלמנטרי. תזרים המזומנים שיתקבל שווה לפער בין שערי המימוש (ΔK), שהרי כששער החליפין יהיה שווה בזמן הפדיון ל-K_2 רק האופציה בשער מימוש K_1 תמומש.

בהינתן שוק הון משוכלל וציבור משקיעים אדיש לסיכון (Risk Neutral Density), עלות האסטרטגיה שתוארה לעיל שווה לתוחלת תזרים המזומנים העתידי מהוונת בריבית חסרת הסיכון במשק. תוחלת תזרים המזומנים מורכבת משתי אפשרויות: הכנסה חיובית וידועה, ΔK, בהסתברות

---

[1] ציבור משקיעים זה אדיש בין השקעה בנכס המניב רווח קבוע וידוע מראש לבין השקעה בנכס המניב רווח לא קבוע, אבל בעל תוחלת רווח השווה לרווח מהנכס הראשון.

[2] ראשונים שהוכיחו זאת היו Breeden and Litzenberger (1978).

[3] ניתן לבצע את אותן העסקאות גם באופציות Put, ולקבל את מאפייני הנכס האלמנטרי.

מסוימת ואפס בהסתברות המשלימה. לכן, השוואה בין העלות לבין תזרים המזומנים העתידי, בהתחשב בגורם היוון, תאפשר לחשב את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה סביב מחיר המימוש K_2 בעת הפדיון של האופציות:

$$1)\quad \Delta K \times P(S_T = K_2;\Delta K) + 0 \times (1 - P(S_T = K_2;\Delta K)) = e^{r\tau}[c(K_3,\tau) + c(K_1,\tau) - 2c(K_2,\tau)]$$

נצמצם את הערכים האפסיים ונחלץ את ההסתברות:

$$2)\quad P(S_T = K_2;\Delta K) = e^{r\tau}\,\frac{c(K_3,\tau) + c(K_1,\tau) - 2c(K_2,\tau)}{\Delta K}$$

בעולם היפותטי, שבו מחיר נכס הבסיס נקבע באופן בדיד ובהתאם לשערי המימוש של האופציות, ההסתברות בנוסחה לעיל מתארת את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס, S_T, שווה ל-K_2. אולם, כשמחיר נכס הבסיס נקבע בפערים קטנים מפערי שערי המימוש, הנוסחה שלעיל מתארת את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה בסביבה הקרובה של K_2[4]. כדי לקבל את ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה שווה ל-K_2 יש לחלק את תזרים המזומנים בפער בין שערי המימוש. נשכתב את משוואה 2 באופן הבא[5]:

$$3)\quad P(S_T = K_2) = e^{r\tau}\,\frac{[c(K_3,\tau) - c(K_2,\tau)] - [c(K_2,\tau) - c(K_1,\tau)]}{(\Delta K)^2}$$

משוואה 3, מחשבת את ההסתברות ש-K_2 אכן יתממש בזמן הפדיון של האופציות. היא מבוססת על עלות אסטרטגיית הפרפר סביב K_2, ומשקפת את הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשער המימוש בנקודה K_2 (ראה דיון חלק ג'). נכליל דוגמא זו על כל שערי המימוש האפשריים, ונחשב את ההסתברות לשער חליפין עתידי כלשהו S_T, על פי עלות ביצוע עסקת הפרפר סביב שער המימוש השווה ל-S_T:

$$4)\quad f(S_T,\tau) = e^{r\tau}\,\frac{[c(S_T + \Delta S_T,\tau) - c(S_T,\tau)] - [c(S_T,\tau) - c(S_T - \Delta S_T,\tau)]}{(\Delta S_T)^2}\Bigg|_{K=S_T}$$

כאשר:

$f(S_T,\tau)$ – פונקצית הצפיפות, ההסתברות שנכס הבסיס שווה ל-S_T בזמן הפדיון.

$c(S_T,\tau)$ - מחיר אופציית Call בשער מימוש S_T ובטווח פדיון τ.

ΔS_T – המרווח בין שערי מימוש קרובים.

בהינתן מידע אודות מחירי האופציות בשערי מימוש שונים, משוואה 4 משקפת את ההסתברות שנכס הבסיס יהיה שווה ל-S_T בזמן הפדיון של האופציות. על כן, בהינתן מספר רב של אופציות בשערי מימוש שונים, ניתן לחשב את ההתפלגות של מחיר נכס הבסיס הצפוי להיות בזמן הפדיון.

---

[4] ההסתברות מתייחסת למקרה שמחיר נכס הבסיס יהיה בזמן הפדיון בטווח הבא: $\frac{K_1 + K_2}{2} \le S_T \le \frac{K_2 + K_3}{2}$

[5] שיכתוב משוואה 3 נעשה בהנחה שההסתברות ששער החליפין שווה במדויק ל-K_2 הינה אחידה לכל השערים האפשריים בסביבת שער המימוש K_2.

בחלק ג' תוצג ההוכחה המתמטית כי משוואה 4 אכן משקפת את פונקצית הצפיפות של נכס הבסיס ומבוססת על הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש.

ג. הוכחה מתמטית לשיטת חישוב א-פרמטרית של ההתפלגות

בחלק זה נוכיח מתמטית את הקשר בין ההתפלגות הצפויה של נכס הבסיס לבין הנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש השונים. תחילה נראה כי משוואה 4, המתבססת על ההשוואה בין עלות עסקת הפרפר לבין תזרים המזומנים בזמן פדיון האופציות, מייצגת את הנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס לשער המימוש. בשלב השני, נוכיח מתמטית כי הנגזרת השנייה אכן משקפת את ההתפלגות של מחיר נכס הבסיס.

כאשר ממירים את מחירי האופציות בשערי מימוש שונים לפונקציה רציפה של כל שערי המימוש האפשריים – מצב שבו פער שערי המימוש שואף ל-0, ניתן לתאר את שני רכיבי משוואה 4 כנגזרת השנייה של מחיר האופציה ביחס לשער המימוש, כלהלן:

$$5)\quad \lim_{\Delta S_T \to 0} f(S_T,\tau) = e^{r\tau}\,\frac{\partial^2 c(K,\tau)}{\partial K^2}$$

לפיכך, פונקצית הצפיפות של מחיר נכס הבסיס, $f(S_T,\tau)$, מחושבת כפונקציה רציפה של עלות אסטרטגיית הפרפר לכל שער חליפין אפשרי (ראה דיון בחלק ב'). נוכיח מתמטית טענה זו בעזרת חישוב הנגזרת הראשונה והשנייה של המשוואה הכללית לתמחור אופציות שפותחה על ידי Cox and Ross (1976). להלן המשוואה הכללית עבור אופציות Call[6]:

$$6)\quad c(K,\tau) = e^{-r\tau}\int_K^\infty f(S_T,\tau)(S_T-K)\,dS_T$$

המשוואה הכללית לתמחור אופציות אינה כוללת בתוכה הנחה כלשהי לגבי פונקצית ההתפלגות של נכס הבסיס והיא מבוססת אך ורק על הפרמטרים הרלוונטיים לתמחור אופציות. בהינתן ציבור משקיעים אדיש לסיכון (RND)[7], מחיר האופציה שווה לערך המהוון, בריבית חסרת סיכון, של סכום התשלומים האפשריים כפול ההסתברות להתרחשותם.

גזירת משוואה 6, לפי שער המימוש, K, מתבצעת בעזרת Leibniz's Rule, המגדיר שני שלבים ביישום הגזירה כיוון שזו כוללת גזירת אינטגרל לפי מחיר נכס הבסיס, S_T. השלב הראשון בגזירת המשוואה הינו גזירת הפונקציה הפנימית ללא האינטגרל:

[6] ניתן להוכיח את הטענה באופן דומה גם בעזרת המשוואה הכללית לתמחור אופציות Put.

[7] לפי Hull, הנחה זו לא הכרחית והיא מונחת לשם הפשטות. לטענתו, זאת משום שגם בהנחה שציבור המשקיעים אינו אדיש לסיכון ישתנו הן התשלומים העתידיים שבנוסחת התמחור הכללית והן הריבית שבעזרתה מהוונים את התשלומים. ההשפעות של שני גורמים אלו מקזזות זו את זו באופן מלא. במסגרת עבודה זו ולמרות טענתו של Hull, אנו מניחים בעבודה זו RND. הסיבה לכך, היא כפי שציין Hull הפשטות. לכאורה כאלטרנטיבה, ניתן היה לפתח את הדיון בחילוץ ההתפלגות ללא הנחת RND אולם אז הייתה עולה רמת הסיבוכיות של הדיון, להערכתנו, ללא הצדקה.

$$7)\ \frac{\partial c(K,\tau)}{\partial K} = -e^{-r\tau}\int_K^\infty f(S_T,\tau)dS_T$$

השלב השני הינו חישוב האינטגרל:

$$8)\ \frac{\partial c(K,\tau)}{\partial K} = -e^{-r\tau}\left[1 - F(S_T,\tau \,|\, S_T = K)\right]$$

הנגזרת הראשונה של המשוואה הכללית למחירי אופציות תלויה אפוא בפונקצית ההתפלגות המצטברת, F(), של נכס הבסיס בזמן הפדיון. לחישוב הנגזרת השנייה של המשוואה הכללית למחירי האופציות נגזור את משוואה 8 לפי שער המימוש, K, ונקבל:

$$9)\ \frac{\partial^2 c(K,\tau)}{\partial K^2} = e^{-r\tau} f(S_T,\tau \,|\, S_T = K)$$

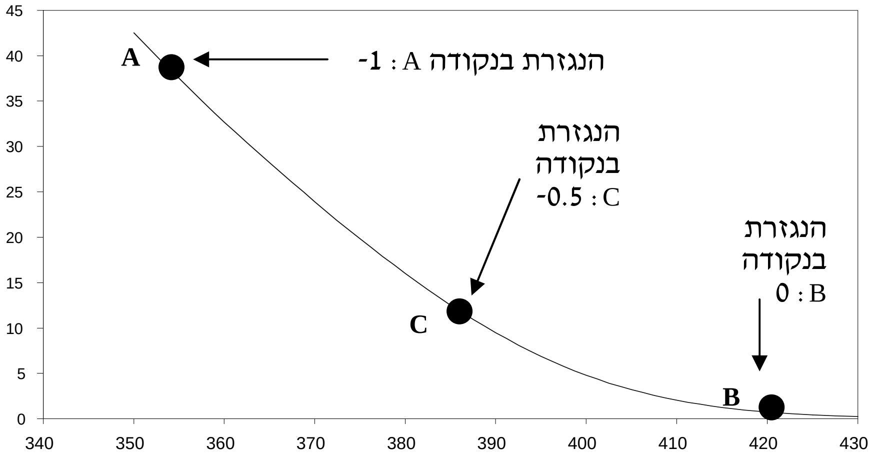
על פי משוואה 9, ניתן לראות כי הנגזרת השנייה של המשוואה הכללית משקפת את פונקצית הצפיפות של נכס הבסיס מהוונת בריבית חסרת הסיכון לתקופת חיי האופציות. תוצאה זו מוכיחה כי צורת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל דולר ניתנת לחישוב על ידי גזירת מחירי האופציות שקל-דולר הנסחרות בבורסה בשערי מימוש שונים. נדגיש כי צורת ההתפלגות על בסיס חישוב זה אינה מאופיינת על ידי פונקצית התפלגות כלשהי, על כן התפלגות זו נקראת התפלגות א-פרמטרית.

ג1. הסבר אינטואיטיבי לשיטת החישוב

בחלק זה נציג את ההסבר האינטואיטיבי של שיטת חישוב ההתפלגות, בעזרת בחינת משמעות הקשר בין מחירי האופציות לשערי המימוש שלהן.

ציור 1.

דוגמא תיאורטית: מחירי אופציות Call, לפי שערי מימוש



כשמחיר המימוש של אופציית Call נמוך במידה משמעותית ממחיר נכס הבסיס (ציור 1, נקודה A) - מצב שבו האופציה נמצאת עמוק "בתוך הכסף" - מחירה הגבוה ישקף, בין היתר, ציפיות לתזרים מזומנים חיובי בעת המימוש. השינויים במחירי האופציות בסביבת שערי מימוש אלו, כפונקציה של שערי המימוש, יהיו ביחס הפוך לשינויים בשערי המימוש: כל עליה בשער המימוש תתפרש כירידה צפויה בתזרים המזומנים העתידי, ותתבטא בירידה במחיר האופציה בשיעור דומה. לכן, נגזרת המחיר ביחס לשערי המימוש בסביבה זו שואפת ל-1-. בשערי מימוש אלו ציבור המשקיעים מעריך כי האופציות צפויות להתממש בוודאות גבוהה. על כן, ניתן להסיק כי ההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה נמוך משערי מימוש אלו שואפת לאפס (אחד פלוס הנגזרת). אולם, ככל שעולים בציר K (בשערי המימוש) כך השינויים במחירי האופציות הולכים וקטנים והערך המוחלט של הנגזרת קטן בצורה מונוטונית עד כדי אפס. תופעה זו, שבה הנגזרת של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש שואפת לאפס, מתקיימת בשערי מימוש הגבוהים משמעותית ממחיר נכס הבסיס (ציור 1, נקודה B) – כלומר אופציה הנמצאת רחוק "מחוץ לכסף". בשערי מימוש אלו השוק מעריך כי האופציות לא צפויות להתממש. לפיכך, ניתן להסיק שההסתברות שמחיר נכס הבסיס יהיה נמוך משערי מימוש אלו גבוהה מאוד עד כדי וודאית (אחד פלוס הנגזרת).

יוצא אפוא כי מחירי האופציות משתנים במידה שונה בין שערי המימוש השונים, כאשר בשערי מימוש גבוהים במיוחד המחירים כמעט ולא משתנים ובשערי המימוש נמוכים במיוחד המחירים משתנים כמעט בכל גודל השינוי בשער המימוש. בין שני קצוות אלו ישנה קשת רחבה של אפשרויות שבהן מידת השינוי במחירי האופציות ביחס לשערי המימוש משתנה. שינויים אלו מצביעים על ההבדלים בסיכויי המימוש של האופציות בשערי המימוש השונים, בעיני הפעילים בשוק האופציות. למשל, בנקודה שבה מחיר האופציה משתנה בחצי מגודל השינוי בשער המימוש, נגזרת השווה לחצי בערכה המוחלט, שער המימוש של האופציה בנקודה זו מסמן את אחד האומדנים של השער הצפוי – חציון ההתפלגות (ציור 1, נקודה C). זו הנקודה שבה ישנם 50 אחוז סיכוי לממש את האופציה (ו- 50 אחוז סיכוי לא לממש).

ד. הנתונים והמדגם

עבודה זו מתבססת על נתוני השוק של אופציות מטבע-חוץ שקל-דולר הנסחרות בבורסה לניירות ערך. בבורסה נסחרות מספר סדרות הנבדלות ביניהן בתאריכי פדיונם. בכל סדרה נסחרות גם אופציות Call וגם אופציות Put במספר שערי מימוש קבועים[8]. מועדי המימוש של סדרות האופציות הם בכל חודש, כך שבכל נקודת זמן קיימות שלוש סדרות של אופציות לכל אחד משלושת החודשים הקרובים וסדרה נוספת לתום הרביע הבא. במהלך שנת 2002 הונפקה סדרת אופציות נוספת, שמועד פקיעתן הוא בתום השנה הקלנדרית. השער הקובע למימוש האופציות הוא השער האחרון שפרסם בנק ישראל לפני תאריך המימוש ובתנאי שביום זה מתקיים מסחר בבורסה. האופציות הנסחרות בבורסה נקראות "מוצרי מדף" והן הומוגניות במאפייניהן, בניגוד לאופציות בבנקים המסחריים, המותאמות לצרכי הלקוחות השונים.

במקביל לדגימת נתוני האופציות נדגם שער החליפין שקל-דולר ששרר באותה העת בשווקים. לעומת זאת, נתוני הריבית השקלית והדולרית הרלוונטית לתקופת חיי האופציות לא נדגמו באופן ישיר מהשווקים והם חולצו מתוך מחירי האופציות בעזרת משוואת Put Call Parity (ראה נספח 1). שיטה זו עוקפת את הבעייתיות בבחירת הריביות הרלוונטיות לציבור המשקיעים.

מרבית המסחר באופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך הינו לטווחי פדיון קצרים (עד 30 יום) ובשערי מימוש הקרובים לשער החליפין הידוע. בטווחי הפדיון הקצרים היקף המסחר מתפרס על פני מספר רב יחסית של שערי מימוש, ואילו בטווחי הפדיון הארוכים יותר נסחרות בממוצע רק שלוש אופציות בשערי מימוש שונים, בדרך כלל סביב שער החליפין שקל-דולר הידוע. לכן, עבודה זו משתמשת בסדרת אופציות בעלת טווח פדיון קצר יחסית, סביב 30 יום לפדיון, כדי לאמוד את ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר.

הנתונים נשמרים במאגרי המידע של המחלקה המוניטרית של בנק ישראל בכל יום מסחר החל מחודש אוקטובר 2002 ועל כן ניתן לחשב את ההתפלגות של שער החליפין ברמה היומית ולבחון את השינויים המתקבלים בצורת ההתפלגות.

[8] כללי הרישום של סדרות אופציות שקל-דולר בבורסה לניירות ערך:

- תחילת תקופה: טווח מחירי המימוש קבוע, ועומד על 70 אגורות - שמונה אופציות בעלות מחירי מימוש שונים. אופציה אחת במחיר מימוש השווה לשער הדולר, ארבע אופציות במחיר מימוש גבוה משער הדולר ושלוש אופציות במחיר מימוש נמוך משער הדולר (בהפרשים של 10 אגורות זו מזו).
- במשך התקופה: יונפקו בכל יום מסחר אופציות נוספות (למעט השבוע האחרון למועד המימוש), בהתאם למהלכו של שער הדולר. כאשר יהיו אופציות במחירי מימוש הגבוהים משער הדולר בשלושים אגורות ובמחירי מימוש הנמוכים משער הדולר בעשרים אגורות (טווח מינימלי של 50 אגורות).
- כאשר טווח האופציות מתקצר ל-4 חודשים ומטה חל כלל נוסף: יונפקו ארבע אופציות בעלות שערי מימוש סביב שער הדולר בהפרשים של חמש אגורות. (כלל זה תופס רק שסטיית התקן השנתית לא גבוהה מ-15 אחוזים).

ה. יישום שיטת החישוב

במסגרת שיטה זו, המוצגת במאמר, ההתפלגות המחושבת משקפת את ממוצע ההתפלגויות הסובייקטיביות של כל אחד מהשחקנים השונים בשוק האופציות. התפלגות זו איננה בהכרח ההתפלגות האמיתית של שער החליפין העתידי, וייתכן כי נוספים לה אלמנטים סובייקטיביים הקשורים בקבלת החלטות תחת סיכון. יתר על כן, שחקנים שונים בשוק רואים לנגד עיניהם התפלגויות שונות, ולכן ההתפלגות המחושבת על בסיס מחירי האופציות הנסחרות היא שקלול של התפלגויות הסובייקטיביות. עם זאת, להתפלגות שצופים השחקנים השונים בשווקים נודעת השפעה רבה על התנהגותם, ולכן התפלגות זו עשויה לעניין יותר מאשר ההתפלגות האמיתית (ראה הכט ושטיין 2004). ביישום ההתפלגות הנגזרת מהאופציות בשערי מימוש שונים על פי שיטת החישוב הא-פרמטרית נצביע על מספר בעיות אמפיריות ודרכי התמודדות עם בעיות אלו.

ה1. התאמת התיאוריה לנתונים

ישנן מספר בעיות ביישום האמפירי של שיטת החישוב:

1. טווח שערי המימוש של האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך אינו רחב דיו, על כן, לא ניתן לגזור ישירות מהאופציות הנסחרות את קצוות ההתפלגות.
2. המרווחים בין שערי המימוש גדולים יחסית – חמש ועשר אגורות, זאת לעומת מחירו של נכס הבסיס (שער השקל-דולר) אשר נע במרווחים של עשירית האגורה. ההבדל בין המרווחים הללו מהווה מגבלה בחישוב ההסתברות לכל מחיר אפשרי של נכס הבסיס. בנוסף, בעיה זו מצביעה על מיעוט יחסי של אופציות בשערי מימוש שונים, בכל נקודת זמן.
3. מסחר דליל במיוחד באופציות בעלות שערי מימוש הרחוקים מהשער הידוע. בעיה אשר משפיעה, בין היתר, על אחידות הנתונים בנקודת זמן אחת[9]. לצורך חישוב ההתפלגות חשוב לדגום את כל מחירי האופציות בשערי מימוש שונים שהתבצעו על סמך אינפורמציה אחידה (מחיר נכס הבסיס, שערי הריבית וכולי). כאשר העסקאות באופציות בשערי מימוש שונים התבצעו בנקודות זמן שונות במהלך יום המסחר (עד לשעת הדגימה) הן לא ישקפו אינפורמציה אחידה. לכן, חישוב ההתפלגות המסתמך על כל מחירי האופציות בשערי המימוש השונים עשוי לשקף מידע מטעה הנובע מאי-אחידות הנתונים.
4. תאריכי הפקיעה של סדרות האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך הם אחת לחודש, לכן בכל יום מסחר הטווח לפדיון אינו קבוע – דבר המקשה על השוואת ההתפלגות במספר תאריכים שונים במהלך החודש.

מיעוט התצפיות המאפיין את המסחר בבורסה לניירות ערך, שמקורו בבעיות שהועלו ב-1 ו-2, יחד עם הבעייתיות הכללית בדגימת נתוני מסחר מקשים על יישום פשוט של שיטת החישוב של ההתפלגות. ההתפלגות על פי השיטה הא-פרמטרית מחושבת, כאמור, כנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. כל הטיה קטנה במחיר אחת האופציות תשפיע על השיפוע של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש - הנגזרת הראשונה, וביתר שאת על הנגזרת השנייה של

מחירי האופציות. לכן, יש להחליק את מחירי האופציות בשערי המימוש השונים ולקבוע ערכי ביניים, כך שמחירי האופציות בשערי מימוש שונים יהיו רציפים ללא הטיות הנובעות מדגימת המחירים - ראה חלק ה2.

בשל בעיית אי-אחידות האינפורמציה במחירי האופציות הנסחרות (בעיה מס' 3) עדיף לדגום את מחירי ההיצע והביקוש, כפי שמופיעים בספרי הבורסה לניירות ערך, על פני דגימת מחירי העסקאות בפועל. כאשר המסחר דליל ומתבצעות עסקאות בודדות במספר אופציות שונות, שכל אחת מהן נוצרה במועד שונה במהלך יום המסחר – מחיריהן יסתמכו על פרמטרים שונים שהשתנו במהלך יום המסחר, כדוגמת מחיר נכס הבסיס. לפיכך, ההתפלגות הצפויה שתחושב על פי מחירים אלו עלולה להיות מוטה ולא תשקף באופן נכון את ההתפלגות. לעומת זאת, מחירי ההיצע והביקוש לכל אופציה, כפי שמופיעים בספרי הבורסה, מהווים מחירים שבהם ניתן לבצע עסקאות – קנייה ומכירה – בכל האופציות בו-זמנית (בנקודת זמן אחת). לכן ממוצע מחירי ההיצע והביקוש מהווה את המחיר הקרוב ביותר שניתן לקנות ולמכור כל אחת מהאופציות בשערי מימוש שונים, ברגע נתון. ראוי לציין כי כל הנתונים הרלוונטיים, לצורך חישוב ההתפלגות הנכונה לתאריך מסוים, מתקבלים באותה נקודת זמן וכפי שציבור המשקיעים מתמחר את כל אחד מהנכסים ברגע נתון.

תאריכי הפקיעה (בעיה מס' 4) של סדרות האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך קבועים, ולכן הטווח לפדיון משתנה בכל יום מסחר. הדבר מקשה על ההשוואה בין צורות ההתפלגות השונות, שכן הן מייצגות טווחי זמן שונים. לצורך השוואה בין התפלגויות בתאריכים שונים נחשב מחירי אופציות סינטטיות לטווח פדיון קבוע - 30 יום, על בסיס מחירי האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך בטווח פדיון הקרוב ביותר ל-30 יום[10].

ה2. החלקת מחירי האופציות

תנאי הכרחי ביישום השיטה הא-פרמטרית הוא שמחירי האופציות בשערי המימוש השונים יהיו ללא הטיות, רציפים וגזירים. בהתאם לזאת, יש להחליק את מחירי האופציות הנדגמים מהשווקים, כך שהשיפוע של מחירי האופציות ביחס לשערי מימוש השונים יהיה רציף בכל נקודה ונקודה. אולם, החלקת מחירי האופציות בשערי מימוש שונים אינה פשוטה ליישום ומחייבת לפתח שיטות החלקה מתוחכמות יחסית. זאת, כיוון שלא ניתן לתאר בעזרת פונקציה כלשהי את מחירי האופציות בשערי מימוש שונים בצורה טובה[11]. Shimko (1993) הציע לראשונה להחליק את מחירי האופציות בשערי המימוש השונים ולקבוע ערכי ביניים דרך סטיות התקן הגלומות בהן. הוא המיר את מחירי האופציות לסטיות תקן גלומות תוך שימוש בנוסחת בלק ושולס[12]

---

[9] בעיה זו משפיעה גם על פרמיית הנזילות הגבוהה יותר בנכסים פיננסיים הפחות סחירים.

[10] שיטה אחרת לחישוב התפלגות לטווח זמן קבוע היא חישוב מחירי אופציות סינטטיות על בסיס שתי סדרות אופציות – האחת בטווח פדיון קצר יותר והשנייה בטווח פדיון ארוך יותר, ראה למשל Clews, Panigirtzoglou and Proudman (2000). אולם מפאת היקפי המסחר הדלים יחסית בסדרות האופציות בטווחים הארוכים יותר (ראה חלק ד) שיטה זו אינה עדיפה.

[11] Bates (1991) החליק את מחירי האופציות לפי שערי מימוש, אולם שיטה זו לוקה בחסר ביכולת ההחלקה.

[12] ראה Black and Scholes (1973). משוואת התמחור על פי בלק ושולס מוצגות בנספח 2.

והחליק את סטיות התקן בעזרת פולינום ממעלה שנייה של שערי המימוש. בעזרת פולינום זה חישב סטיות תקן גלומות רציפות וללא הטיות לכל שער מימוש, והמיר אותן בחזרה למחירים. המרת מחירי האופציות לסטיות תקן גלומות והמרתם בחזרה בעזרת נוסחת בלק ושולס מהווה בסיס להחלקת הטעויות בדגימת מחירי האופציות וקביעת ערכי ביניים ואין בה הנחה סמויה שמודל בלק ושולס נכון (ראה גם Bahra, 1997).

Malz (1997) התבסס על שיטתו של Shimko (1993), להחלקת מחירי האופציות, אולם הוא החליק את סטיות התקן הגלומות בעזרת פונקציה ריבועית של שיעור השינוי של מחיר האופציה ביחס לשיעור השינוי בנכס הבסיס - להלן הדלתא של האופציה. לטענתו שיטה זו מחליקה את סטיות התקן הנמצאות במרכז ההתפלגות ברגישות גדולה יותר. הדלתאות של מחירי האופציות מודדות את רגישות המחירים לשינויים בנכס הבסיס, ולכן סטיית התקן במרווחי דלתא (במקום במרווחי שערי מימוש) מגדילה את המרווחים בין האופציות בשערי מימוש הקרובים לכסף ומקטינה את המרווחים בין אופציות בשערי מימוש רחוקים מהכסף. לפיכך, שיטה זו מאפשרת גמישות רבה יותר בהחלקת מחירי האופציות הנמצאות במרכז תחום ההתפלגות. גמישות זו מאפשרת מדידה טובה יותר של מרכז ההתפלגות הגלומה במחירי האופציות. אולם, שיטה זו מתאימה במיוחד לנתוני האופציות של המערכת הבנקאית אשר להן מגוון רב מאוד של שערי מימוש במרכז ההתפלגות. שיטת החלקה זו, המבוססת על הדלתאות של האופציות, נבחנה במסגרת עבודה זו על נתוני האופציות הנסחרות בבורסה ונמצא כי היא אכן אינה מתאימה לנתוני האופציות הללו ואינה משפרת את טיב ההתאמה בהשוואה להחלקה המבוססת על שערי מימוש.

Campa, Chang, and Reider (1997) בחרו להחליק את סטיות התקן הגלומות ולקבוע ערכי ביניים תוך שימוש בשיטת אמידה המאפשרת גמישות גדולה יותר בתיאור פונקצית סטיות התקן ביחס לשערי מימוש, ולכן גם בתיאור צורת ההתפלגות. שיטה זו נקראת "A natural spline", שיטה המחלקת את טווח שערי המימוש למספר קטעים אשר כל אחד מהם מאופיין על ידי פולינום. הפולינומים השונים נבחרים כך שבנקודות המפגש ביניהם מתקיים שוויון הן בערכן והן בנגזרת הראשונה שלהן.

עבודה זו מיישמת מודל להחלקת מחירי האופציות וקביעת ערכי ביניים המבוסס על החידושים בספרות שנסקרו לעיל תוך התאמה לנתוני האופציות הנסחרות בבורסה לניירות הערך בתל-אביב. בהתאם לזאת, החלקת סטיות התקן הגלומות בעבודה זו התבצעו באמצעות פולינום ממעלה שנייה של שערי המימוש תוך אפשרות לנקודת שבר אחת בסטיות התקן הגלומות, שבה שני הפולינומים הנאמדים שווים וגזירים[13]. נקודת שבר זו אינה ידועה מראש ונקבעת יחד עם מקדמי הפולינום בעזרת פונקציה מטרה הממזערת את ריבוע הסטיות בין סטיות התקן שהתקבלו ממחירי האופציות שנדגמו לאלו שמתקבלות במשוואת ההחלקה הבאה (ראה נספח 3 לפיתוח המשוואה):

[13] במסגרת עבודה זו בחנתי גם את טיב ההחלקה של סטיות התקן בעזרת הדלתאות של האופציות. נמצא כי ההחלקה בעזרת הדלתאות לוקה בחוסר רגישות בזנבות ההתפלגות דבר המשפיע לרעה על טיב ההחלקה של הסטיות הנמצאות גם במרכז ההתפלגות. תוצאה זו נובעת בעיקר בשל בעיות הסחירות של נתוני האופציות הנסחרות בבורסה לניירות הערך, אשר אין להן מגוון רב של שערי מימוש שונים במרכז ההתפלגות. לעומת זאת, ביישום השיטה הא-פרמטרית על נתוני האופציות של המערכת הבנקאית אשר להן מגוון רב מאוד של שערי מימוש הנמצאים במרכז ההתפלגות שיטת ההחלקה המומלצת תהיה בעזרת הדלתאות של האופציות עם מספר רב של נקודות שבר.

$$10)\ \sigma_{(K)} = \alpha + \beta \times K + \gamma_1 \times K^2 + (\gamma_2 - \gamma_1) \times (K - K_0)^2 \times M + \mu_{(K)}$$

כאשר:

$\sigma_{(K)}$ – סטיית התקן הממוצעת של אופציית Call ואופציית Put בשער מימוש K.

K – שער המימוש של אופציה.

K_0 – נקודת השבר של משוואת האמידה.

M – משתנה דמי המסווג את האופציות השונות בהתאם לנקודת השבר.

צפוי כי נקודת השבר תתקבל בסביבת שער החליפין של הפורוורד ותשקף התפלגות גלומה המאופיינת בצורה שונה בשני צידיה. ככל שהמקדם γ_2 מובהק יותר כך שני צידי ההתפלגות יהיו שונים יותר, דבר המשקף א-סימטריה בהתפלגות הציפיות. כאשר γ_2 אינו מובהק - דבר המעיד כי סטיות התקן בשערי המימוש השונים מאופיינות על ידי פולינום אחד ללא נקודת שבר - ההתפלגות הגלומה תאופיין בצורה דומה בשני צידיה ותשקף התפלגות סימטרית של הציפיות. לפיכך, ניתן לומר כי שיטת החלקה זו של סטיות התקן מאפשרת מגוון רחב מאוד של התפלגויות סימטריות וא-סימטריות.

במסגרת עבודה זו לא נעשה ניסיון להערכת מחירי אופציות מחוץ לטווח שערי המימוש הנדגמים ולכן זנבות ההתפלגות אינם ידועים, דבר המקשה לחשב מספר פרמטרים המאפיינים את צורת ההתפלגות. אלטרנטיבית, ניתן להניח כי סטיית התקן בקצוות ההתפלגות - מחוץ לטווח שערי המימוש הקיימים - הינה פונקציה שטוחה, בדומה להנחתם של Shimko (1993), Campa, Chang, and Reider (1997) ו- Bliss and Panigirtzoglou (2002). אולם הנחה זו, להערכתי, אינה נתמכת בממצאים האמפיריים ויתרה מכך, היא מאלצת את סטיות התקן הנמצאות בקצוות הטווח הקיים של שערי המימוש להתנהג בהתאם להנחה זו. נדגיש כי, גם כאשר זנבות ההתפלגות אינם ידועים, ניתן לחלץ מספר פרמטרים המתארים את צורת ההתפלגות בצורה פרטנית.

ה3. יישום אמפירי – הלכה למעשה

ליישום ההתפלגות הגלומה באופציות בשערי מימוש שונים על פי שיטת החישוב הא-פרמטרית ובהתאם לבעיות הנתונים שהועלו לעיל, נחשב ונאמוד מספר משוואות לפי הסדר הבא:

1) משוואות אמידה המחלצות את הריבית השקלית והריבית הדולרית הטמונות באופציות. משוואות אלו מתבססות על נוסחת Put Call Parity (ראה נספח 1).

2) משוואות, המתבססות על נוסחת בלק ושולס, לחילוץ סטיית התקן הגלומה באופציות בשערי מימוש שונים (ראה נספח 2).

3) משוואת אמידה א-פרמטריות להחלקה ולחישוב ערכי ביניים של סטיות התקן הגלומות. (משוואה מס. 10, ראה נספח 3).

4) משוואות המחלצות (חזרה) את מחירי האופציות המוחלקות בשערי מימוש שונים. לשם כך נציב במשוואות מסעיף 2 את סטיות התקן המוחלקות (המתקבלות מסעיף 3) ונחשב את המחירים של האופציות בפערים קבועים של שערי מימוש ולטווח פדיון קבוע – 30 יום – להלן אופציות סינטטיות.

בהינתן מחירי האופציות הסינטטיות בשערי מימוש שונים – על בסיס סטיות התקן המוחלקות - הנגזרת הראשונה של המחיר ביחס לשער המימוש מהווה בסיס לחישוב ההתפלגות המצטברת של נכס הבסיס, ראה משוואה 8. על פי משוואה זו, ניתן לחלץ את נוסחת החישוב להתפלגות המצטברת על ידי העברת אגפים, כלהלן:

$$11)\, F(S_T, \tau | S_T = K) = \frac{e^{r\tau} \times \partial c(K,\tau)}{\partial K} + 1$$

נשכתב משוואה 11 כך שתותאם לנתוני האופציות הסינטטיות, לאחר החלקת מחיריהם וקביעת ערכי ביניים:

$$12)\quad \mathrm{P}(S_T < \frac{K_i + K_{i-1}}{2}) = 1 + \frac{e^{r\tau} \times [c(K_i,\tau) - c(K_{i-1},\tau)]}{(K_i - K_{i-1})}$$

כאשר:

S_T – שער החליפין שקל-דולר הידוע.

$C(K_i,\tau)$ – מחיר אופציית Call לדולר אחד בשער מימוש של K_i ובטווח פדיון τ - העומד על 30 יום.

K_i – שער המימוש; כאשר $K_{i-1}<K_i$, ו- $\Delta K_i = 0.01$ (אגורה אחת).

r – ריבית שקלית המתאימה ל-30 יום.

ההתפלגות הגלומה באופציות מטבע חוץ, כפי שמוצגות בפרק התוצאות, הינה פונקצית הצפיפות של ההתפלגות המצטברת והיא מחושבת בהתאם להפרשי שערי המימוש של האופציות הסינטטיות שהוזכרו לעיל (אגורה אחת). בעזרת ההתפלגות המצטברת ופונקצית הצפיפות ניתן לחשב אומדני ציפיות ואומדני סיכון המשקפים ביתר פירוט את ציפיות הציבור לגבי התפתחות עתידית של שער החליפין שקל-דולר.

ו. תוצאות המודל

בפרק זה נראה כיצד האינפורמציה הגלומה בהתפלגות הצפויה של השינויים בשער החליפין יכולה לשמש כלי בניתוח ההתפתחויות העתידיות של שער החליפין. במסגרת עבודה זו נבחנו מספר דוגמאות של ההתפלגות הצפויה בתאריכים בהם התרחשו אירועים מרכזיים, וחושבו מספר מדדים סטטיסטיים המשקפים את פונקצית ההתפלגות. מדדים אלו משקפים את מבנה הציפיות של המשקיעים לשינוי העתידי של שער החליפין שקל-דולר. נוסף על כך, ניתן להשוות את החציון של ההתפלגות, המהווה את אחד האומדנים לשינוי הצפוי בשער החליפין, לפרמיית הפורוורד, המתקבלת מהפער שבין הריבית השקלית לריבית הדולרית. השוואה זו נעשית בהנחה שעיקרון UIP מתקיים שלפיו פרמיית הפורוורד מייצגת את האומדן לשינוי הצפוי בשער החליפין – תוחלת השינוי. לעומת זאת, Fama (1984), Taylor (1995) ושטיין (2003) טענו כי פרמיית הפורוורד מהווה אומדן מוטה לשינוי הצפוי וזאת מכיוון שכלולה בה גם פרמיית הסיכון הגלומה בשער החליפין. לפיכך, כטענתם, יש לנכות את פרמיית הסיכון מפער הריביות כדי לאמוד את השינוי הצפוי בשער החליפין ללא הטיות. במסגרת עבודה זו, נבחן חציון ההתפלגות, המשקף אומדן לשינוי הצפוי המתקבל מההתפלגות הנאמדת, והושווה לפרמיית הפורוורד, בה כלולה כאמור פרמיית סיכון. השוואה כזו מאפשרת לחשב את הערכים הבאים: (1) הפער הממוצע בין שני אומדני ציפיות אלו - פער המצביע על קיום פרמיית סיכון בפרמיית הפורוורד. (2) הפערים המשתנים על פני זמן - פערים המצביעים על א-סימטריה בציפיות ומלמדים על הציפיות לגבי מהלכו העתידי של שער החליפין. בציור 2 מוצגים נתונים יומיים של חציון ההתפלגות ופרמיית הפורוורד, בתקופה ינואר-אוקטובר 2004. מחישוב הממוצע של שני אומדנים אלו מתקבל כי פרמיית הפורוורד עמדה בעשרת החודשים הראשונים של 2004 על 0.26 אחוז, זאת לעומת חציון ההתפלגות שעמד על 0.14 אחוז בממוצע. פער זה מחזק את המסקנה כי פרמיית הפורוורד כוללת פרמיית סיכון ומהווה אומדן מוטה כלפי מעלה לתוחלת שער החליפין. נוסף על כך, ניתן לראות בציור 2 כי בחמשת החודשים הראשונים של 2004 חציון ההתפלגות נע סביב פרמיית הפורוורד ולא נפתח פער עקבי לאורך זמן. לעומת זאת מחודש יוני 2004 ובמיוחד בחודש אוקטובר חציון ההתפלגות היה קטן מפרמיית הפורוורד באופן מובהק ולעיתים אף שלילי. ממצא זה מצביע על א-סימטריה בציפיות, כלומר מסת ההתפלגות התרכזה סביב ציפיות לשינוי שער החליפין הקטן מהשינוי הנגזר מפער הריביות ובחודש אוקטובר הצביעה אף על ייסוף שער החליפין.

ציור 2

חציון ההתפלגות ופרמיית הפורוורד

נתונים יומיים, ינואר-אוקטובר, 2004

להלן מספר דוגמאות למידע שניתן לגזור מהאופציות לגבי השינוי הצפוי בשער החליפין שקל-דולר לטווח של 30 יום, בשישה תאריכים נבחרים בהם התרחשו אירועים מרכזיים:

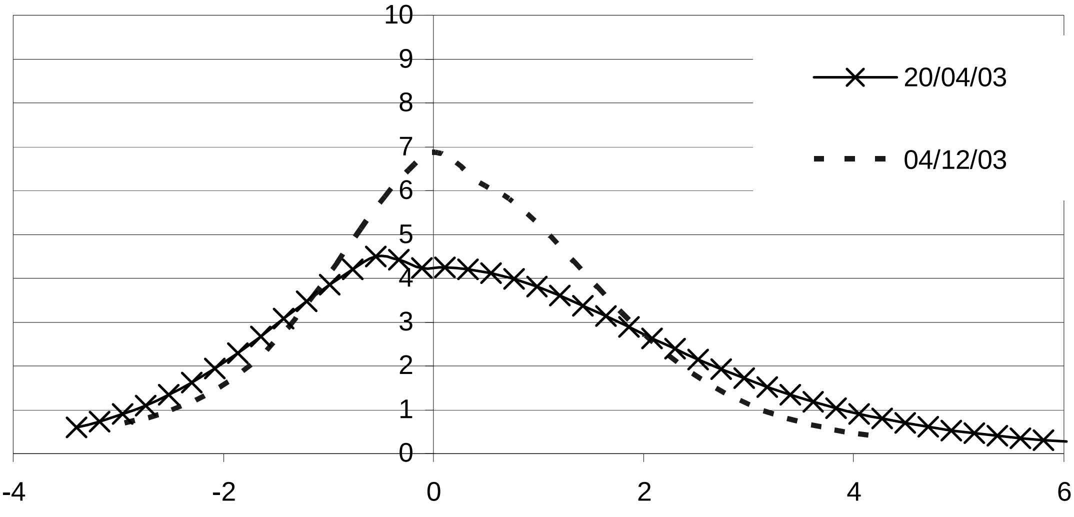
1. ב-20 באפריל 2003, כשבועיים לאחר הפלת המשטר בעיראק על ידי צבא ארה"ב והמשך הלחימה, ולאור פיגועי הטרור בארץ, שער החליפין שקל-דולר באותה תקופה נע בטווח רחב יחסית – 4.9 - 4.5 שקל לדולר. ההתפלגות הגלומה התאפיינה ברמת אי-ודאות גבוהה מאוד סביב שער החליפין שקל-דולר הידוע (ציור 3). בעוד שחציון ההתפלגות משקף פיחות של 0.3 אחוזים, השינוי השכיח ביותר שיקף ייסוף של 0.2 אחוז. יחד עם ציפיות אלו, ההסתברות לשינוי השכיח ביותר, המהווה אומדן לרמת הוודאות לגבי אומדני הציפיות, היה נמוך מאוד ועמד על 4.4 אחוז (לוח 1). בנוסף, ניתן לראות כי הזנב הימני של ההתפלגות עבה מזנבה השמאלי – דבר המעיד כי ההסתברות לפיחות חד יחסית נותרה גבוהה; ההסתברות לפיחות של מעל שלושה אחוזים עומדת על 12.9 אחוזים וההסתברות לייסוף מעל שני אחוזים עומדת על 10.4 אחוז.
2. ב-4 בדצמבר 2003, לאחר שסימנים ראשונים בישרו על התאוששות בפעילות הכלכלית המקומית והעולמית, רגיעה יחסית באירועים הביטחוניים וייסוף מתון בשער החליפין שקל-דולר ל-4.4 ש"ח לדולר, אופיינה ההתפלגות ברמת אי-ודאות נמוכה יחסית לאותה תקופה ולשנת 2003 כולה (ציור 3): חציון ההתפלגות עמד על 0.3 אחוז ואילו השינוי השכיח ביותר שיקף אי-שינוי בשער, תוך עלייה באומדן לרמת הוודאות – 6.8 אחוז. במקביל לציפיות אלו ההסתברות לשינויים חדים פחתה מאוד: ההסתברות לפיחות של מעל שלושה אחוזים עמדה על 5 אחוזים וההסתברות לייסוף של מעל לשני אחוזים עמדה על 5.2 אחוזים (לוח 1). התפלגות זו משקפת אי-וודאות נמוכה יחסית בציפיות לשינוי אפשרי בשער החליפין, הצפוי להיות בדומה לפער הריביות באותה התקופה – שלוש עשיריות האחוז.

ציור 3

ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין שקל-דולר

שני תאריכים נבחרים, 2003

(אחוזים)



3. ב-26 באוגוסט 2004, לאור רגיעה ממושכת בשער החליפין שקל-דולר במהלך שנת 2004 ולאחר פיחות מתון בשער החליפין שקל-דולר לרמה של 4.52 ש״ח לדולר, ההתפלגות הייתה סימטרית, כאשר חציון ההתפלגות והשינוי השכיח ביותר הצביעו על פיחות קל של שתי עשיריות האחוז, בדומה לפער הריביות באותה התקופה (ציור 4). ההסתברות לשינויים חדים יחסית הייתה נמוכה יחסית: ההסתברות לפיחות של שלושה אחוזים ויותר עמדה על 1.6 אחוזים בלבד וההסתברות לייסוף של שני אחוזים ויותר עמדה על 3.8 אחוזים (לוח 1).

4. ב-26 באוקטובר 2004, לפני ההצבעה בכנסת על תוכנית ההתנתקות מחבל עזה, שער החליפין הגיע לרמתו הנמוכה ביותר בחודשים האחרונים, מרכז ההתפלגות נטה לכיוון ייסוף קל, כאשר השכיח ביותר וחציון ההתפלגות הצביעו על ייסוף של עשירית האחוז (ציור 4). האומדן לרמת הוודאות עלה במעט ומשקף רמת אי-וודאות נמוכה יותר לייסוף מתון בשער החליפין שקל-דולר. יחד עם מגמה זו, ההסתברות לפיחות חד – מעל לשלושה אחוזים – עלתה והגיעה ל-5.2 אחוזים ואילו ההסתברות לייסוף חד יחסית – מעל לשני אחוזים – ירדה במעט והגיעה ל-3.1 אחוזים (לוח 1).

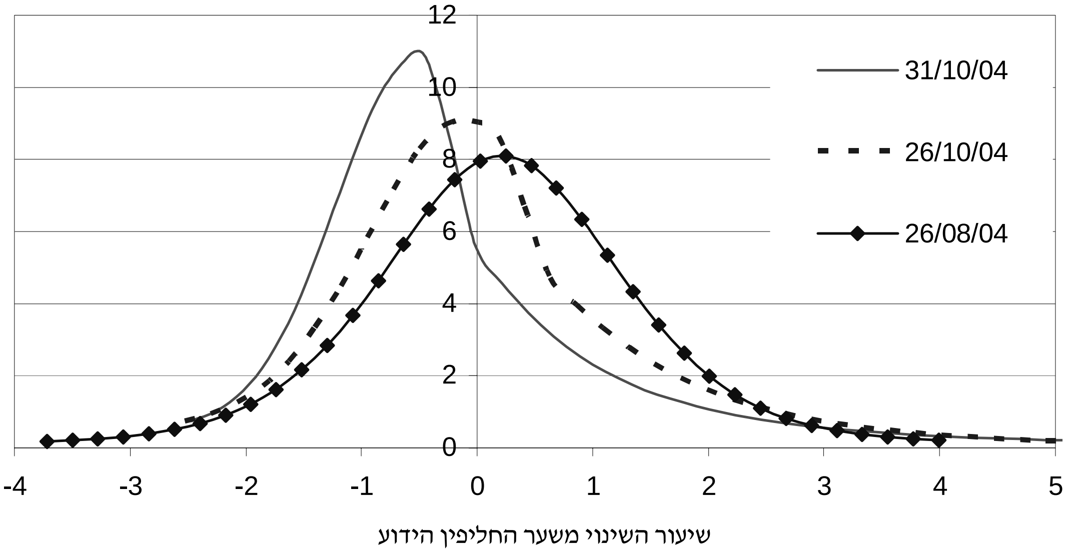
5. ב-31 באוקטובר 2004, יחד עם אישור תוכנית ההתנתקות, איומי פרישה מצד חברי הקואליציה מהממשלה, ופרסום מחלתו של ראש הרשות הפלשתינית, התפלגות הציפיות לשינויים בשער החליפין שקל-דולר נטתה להמשך ייסוף תוך הסתברות הולכת וגדולה לפיחות חד יחסית בשער החליפין (ציור 4). תקופה זו, התאפיינה במגוון רב של התרחשויות אפשריות וניתן לראות שההסתברות לשינויים חדים הן לייסוף והן לפיחות עלתה (לוח 1). יחד עם זאת, ניתן לראות כי האומדן לרמת הוודאות המשיך לעלות והגיע ל-11 אחוזים, דבר המשקף כי במקביל לקיומם של תרחישים קיצוניים יחסית במשק הישראלי המשקל להתרחשותם קטן יחסית.

ציור 4

ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין שקל-דולר

שלושה תאריכים נבחרים, 2004

(אחוזים)



לוח 1.

נתונים סטטיסטיים - ההתפלגות הצפויה של השינוי בשער החליפין

(אחוזים)

	חציון	השינוי השכיח ביותר	ההסתברות לשינוי השכיח ביותר	ההסתברות לייסוף חד	ההסתברות לפיחות חד
20/04/03	0.3	-0.2	4.4	10.4	12.9
04/12/03	0.3	0.0	6.8	5.2	5.0
26/08/04	0.2	0.2	8.1	3.8	1.6
26/10/04	-0.1	-0.1	9.1	3.1	5.2
31/10/04	-0.4	-0.5	10.9	2.9	7.6

ז. סיכום והמלצות

עבודה זו מציגה שיטה פשוטה יחסית לחישוב ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר בהתבסס על המסחר באופציות שקל-דולר בבורסה לניירות ערך בתל-אביב, אופציות הזהות בטווחי הפדיון ושונות בשערי המימוש. התפלגות שער החליפין, כפי שצופים אותה השווקים, משתקפת היטב במחירי האופציות בשערי מימוש שונים, וזאת מפני הרגישות הגבוהה של מחיריהן להתפתחויות הצפויות בשווקים הפיננסיים.

ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר מחושבת בעבודה זו על בסיס הטענה האלמנטרית (elementary claim) המשתקפת בנגזרת השנייה של מחירי האופציות ביחס לשערי המימוש. שיטה זו ידועה בספרות המקצועית כשיטת אמידה א-פרמטרית של ההתפלגות, שכן בחישוב זה אין הנחה לגבי צורת ההתפלגות ולגבי התהליך הסטוכסטי של שער החליפין שקל-דולר. שיטה זו מאפשרת גמישות מרבית בקביעת צורת ההתפלגות ואינה מגבילה את צורת ההתפלגות לפונקציה מסוימת. בניתוח ההתפלגות ניתן ללמוד על ציפיות הציבור לגבי מהלך עתידי של שער החליפין ולחשב את חציון ההתפלגות וכן את ההסתברויות השונות לפיחות/ייסוף בשיעורים קבועים. כאשר חציון ההתפלגות שונה באופן מובהק מפרמיית הפורוורד, שהיא תוחלת שער החליפין, ניתן ללמוד כי הציפיות מאופיינות בא-סימטריה ומסת ההתפלגות מצביעה על שינוי שער החליפין השונה מתוחלתו. בחינה זו של האופציות הנסחרות בבורסה לניירות ערך מאפשרת אפוא ללמוד על התפתחותו הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, ובכך משפרת את ניתוח ההתפתחויות בשוק מטבע החוץ. שימוש במתודולוגיה זו על נתוני האופציות הנסחרות על מדד המניות תל-אביב 25 תאפשר לגזור את ההתפלגות הצפויה של מדד המניות.

נספח 1 - חילוץ ריבית שקלית ודולרית מתוך האופציות בשערי מימוש שונים

נוסחת Put Call Parity מגדירה כי הסכום של מחיר אופציית Call (בשער מימוש K) ו-K שקלים מהוון בריבית השקלית שווה לסכום של מחיר אופציית Put (בשער מימוש K) ושער הדולר מהוון בריבית הדולרית. ההנחה בבסיס הנוסחה - שוק הון משוכלל ומספיק עמוק.

$$1)\qquad C(K) + \beta*K = \alpha + P(K)$$

כאשר C(K) ו-P(K) הינם מחירי האופציות Call ו-Put בשערי מימוש K, המקדם α מייצג את שער הדולר מנוכה ריבית דולרית לתקופת חיי האופציות והמקדם β מייצג את גורם ההיוון המתחשב בריבית השקלית לתקופת חיי האופציות.

נעביר אגפים ונסדר את הנוסחה למשוואת אמידה:

$$2)\qquad C(K) - P(K)= \alpha - \beta*K + U$$

כאשר α הינו החותך במשוואת האמידה והוא משקף את שער הדולר המהוון בריבית הדולרית לתקופה המתאימה, כפי שבא לידי ביטוי במחירי האופציות, β הינו השיפוע של משוואת האמידה והוא משקף את הריבית השקלית לצורך היוון שער המימוש הנקוב בשקלים למשך חיי האופציה, ו-U הינו הטעות המקרית.

בהינתן תוצאות אמידת נוסחת Put Call Parity ושער החליפין שקל-דולר, שנדגם בזמן דגימת מחירי האופציות, ניתן לחלץ את הריבית השקלית והדולרית בכל יום מסחר, כלהלן:

$$3)\qquad rf = \left(\frac{Spot}{\alpha}\right)^{\frac{365}{t}} - 1$$

$$4)\qquad rd = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{365}{t}} - 1$$

נספח 2 – המרת מחירי אופציות לסטיות תקן וחזרה

בהינתן מחירי האופציות בשערי מימוש שונים, שער הדולר הידוע, והריבית השקלית והדולרית (שחולצו בעזרת נוסחת Put Call Parity, ראה נספח 1), ניתן להציב בנוסחאות תמחור האופציות של בלק ושולס ולחלץ את סטיית התקן הגלומה באופציות. חילוץ סטיית התקן הגלומה מתבצע תוך התאמה הטובה ביותר בין מחירי האופציות השונות שנדגמו - אופציות Put ו-Call בשערי המימוש השונים לבין המחירים המתקבלים בנוסחאות התמחור, שלהלן:

$$1)\quad C(K,\tau) = St * e^{-rf*\tau} * N(d1) - N(d2) * K * e^{-rd*\tau}$$

$$2)\quad P(K,\tau) = N(-d2) * K * e^{-rd*\tau} - St * e^{-rf*\tau} * N(-d1)$$

כאשר:

$$d1 = (Log(St / K) + (rd - rf + (z^2) / 2) * \tau) / (z * \tau^{0.5})$$

$$d2 = d1 - (z * \tau^{0.5})$$

$C(K,\tau)$ – ערכה של אופציית Call בעלת שער מימוש K וטווח פדיון τ, St – שער הדולר, rd – ריבית שקלית, rf – ריבית דולרית, z – סטיית תקן גלומה, ו-N() – ההתפלגות המצטברת עד לערך בסוגריים בהינתן התפלגות נורמלית סטנדרטית

חישוב מחירי האופציות הסינטטיות, לאחר החלקת סטיות התקן הגלומות, יתבצע תוך שימוש פשוט במשוואות 1-2 ; הצבת כל הפרמטרים כולל סטיות התקן המוחלקות (משוואה מס. 10, בגוף העבודה) וחישוב מחירי האופציות בטווח פדיון קבוע ובשערי מימוש במרווחים של אגורה אחת, להלן אופציות סינטטיות.

נספח 3 – פיתוח משוואת האמידה להחלקת סטיית התקן הגלומה

בחלק זה נציג את פיתוח המשוואה לצורך החלקת סטיות התקן הגלומות באופציות בשערי מימוש שונים. המשוואה הינה פולינום מדרגה שנייה של סטיות התקן הגלומות ביחס לשערי המימוש ובעלת נקודת שבר אחת. משוואה זו חייבת להיות רציפה וגזירה, כדי שתאפשר להמיר את סטיות התקן למחירי אופציות (בשערי מימוש שונים) רציפים וגזירים. בהתאם לכך, נוסיף למשוואה הבסיסית שני אילוצים העונים לקריטריונים אלו.

להלן המשוואה הבסיסית להחלקת סטיות התקן המאופיינת בנקודת שבר אחת :

1) $\sigma_{(K)} = (\alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2) * (1\text{-}M) + (\alpha_2 + \beta_2 * K + \gamma_2 * K^2) * M$

$M = 0$

If $K <= K_0$ Then $M = 1$

כאשר $\sigma_{(K)}$ ו- K הם סטיית התקן הגלומה בשער מימוש K – אופציות Call ואופציות Put בממוצע - ושער המימוש של אופציה, ו-M הנו משתנה דמי אשר מקבל ערך של 0 כאשר K קטן מ-K_0 וערך של אחד כאשר K גדול ושווה ל-K_0.

אילוץ מספר אחד : רציפות הפונקציה בנקודת השבר (K_0)

2) $\alpha_1 + \beta_1 * K_0 + \gamma_1 * K_0^2 = \alpha_2 + \beta_2 * K_0 + \gamma_2 * K_0^2$

2.1) $\alpha_2 - \alpha_1 = (\beta_1 - \beta_2) * K_0 + (\gamma_1 - \gamma_2) * K_0^2$

אילוץ מספר שתיים : רציפות נגזרת הפונקציה בנקודת השבר (K_0)

3) $\beta_1 + 2 * \gamma_1 * K_0 = \beta_2 + 2 * \gamma_2 * K_0$

3.1) $\beta_2 - \beta_1 = (\gamma_1 - \gamma_2) * 2 * K_0$

פיתוח משוואה 1 :

1.1) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 * K + \gamma_1 * K^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) * M + (\beta_2 - \beta_1) * K * M + (\gamma_2 - \gamma_1) * K^2 * M$

הצבה של אילוץ הראשון (2.1) במשוואה 1.1 ופיתוח המשוואה :

4) $\sigma_{(K)} = \alpha_1 + \beta_1 *K + \gamma_1 *K^2 + [(\beta_1-\beta_2)*K_0 + (\gamma_1-\gamma_2)* K_0^2] * M +(\beta_2-\beta_1)* K* M +(\gamma_2-\gamma_1)* K^2* M$

4.1) $\sigma_{(K)}= \alpha_1+\beta_1* K+\gamma_1* K^2+ [(\beta_2-\beta_1)*(-K_0)+ (\gamma_2-\gamma_1)*(-K_0^2)]* M + (\beta_2-\beta_1)* K* M +(\gamma_2-\gamma_1)*K^2* M$

4.2) $\sigma_{(K)} = \alpha_1+ \beta_1*K+ \gamma_1*K^2+ (\beta_2 - \beta_1)*(K- K_0)* M + (\gamma_2 - \gamma_1)*(K^2 - K_0^2)* M$

הצבה של האילוץ השני (3.1) במשוואה 4.2 ופיתוח המשוואה :

5) $\sigma_{(K)} = \alpha_1+ \beta_1*K+ \gamma_1*K^2 +[(\gamma_1 - \gamma_2)* 2* K_0] * (K - K_0)* M + (\gamma_2 - \gamma_1)*(K^2 - K_0^2)* M$

5.1) $\sigma_{(K)} = \alpha_1+ \beta_1*K+ \gamma_1*K^2 +(\gamma_2 - \gamma_1)*(K^2 - 2 * K_0*K+ K_0^2) * M$

משוואת האמידה להחלקת סטיות התקן לפי שערי מימוש :

5.2) $\sigma_{(K)} = \alpha_1+ \beta_1*K+ \gamma_1*K^2 +(\gamma_2 - \gamma_1)*(K - K_0)^2 * M$

ביבליוגרפיה

הכט, יואל ורועי שטיין (2004), "אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר הגלומה במחירי האופציות", רבעון לכלכלה 51, מס' 1, ע. 60-36.

שטיין רועי (2003), "אמידת שער החליפין הצפוי באמצעות אופציות CALL על שער ה-FORWARD", סוגיות במערכת הבנקאות 16, עמ' 71-53.

Arrow, K. J. (1964), "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", Review of Economic Studies, 31 No. 2, PP 91-96.

Bahra, Bhupinder (1997), "Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application", Bank of England 1997.

Bates, D. S. (1991), "The Crash of '87: Was it Expected? The Evidence from Options Markets", Journal of Finance, 46 (3), PP 1009-44.

Black, F and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81. PP. 637-59.

Bliss, R. Robert and N. Panigirtzoglou (2002), "Testing the Stability of Implied Probability Density Functions", Journal of Banking and Finance, 26, PP 381-422.

Breeden, D. and R. Litzenberger (1978), "Prices of State Contingent Claims Implicit in Options Prices", Journal of Business, Vol. 51, PP. 621-651.

Campa, J.M., P.H.K. Chang and R.L. Reider (1997), "ERM Bandwidths for EMU and After: Evidence from Foreign Exchange Options", Economic Policy, 24 PP. 55-89.

Clews, Roger, Nikolaos Panigirtzoglou and James Proudman (2000), "Recent Developments in Extracting Information from Option Markets", Bank of England Quarterly Bulletin, Feb. 2000, PP. 50-60.

Cox, J. and S. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics, 3, PP. 145-66.

Debreu, G. (1959), "Theory of Value", New York: Wiley.

Fama, E. F. (1984). “Forward and Spot Exchange Rates”, Journal of Monetary *Economics*, 14, 319-338.

Hull, J. C. (2000). Options, Futures, & Other Derivatives, Prentice Hall (4th edition)

Malz, A. (1997), "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices", The Journal of Derivatives (Winter) PP. 20-36.

Shimko, D (1993), "Bounds of Probability”, *Risk 6, No.* 4.

Taylor, M.P. (1995). “The Economics of Exchange Rates”, *Journal of Economic Literature,* 33(1), 13-47.

Monetary Studies

עיונים מוניטריים

1999.01 א' אזולאי, ד' אלקיים – מודל לבחינת ההשפעה של המדיניות המוניטרית על האינפלציה בישראל, 1988 עד 1996

1999.02 ד' אלקיים, מ' סוקולר – השערת הניטרליות של שיעור האבטלה ביחס לאינפלציה בישראל – בחינה אמפירית, 1990 עד 1998

2000.01 M. Beenstock, O. Sulla – The Shekel's Fundamental Real Value

2000.02 O. Sulla, M. Ben-Horin –Analysis of Casual Relations and Long and Short-term Correspondence between Share Indices in Israel and the United States

2000.03 Y. Elashvili, M. Sokoler, Z. Wiener, D. Yariv – A Guaranteed-return Contract for Pension Funds' Investments in the Capital Market

2000.04 י' אלאשווילי, צ' וינר, ד' יריב, מ' סוקולר – חוזה להבטחת תשואת רצפה לקופות פנסיה תוך כדי הפנייתן להשקעות בשוק ההון

2001.01 ד' אלקיים – יעד האינפלציה והמדיניות המוניטרית – מודל לניתוח ולחיזוי

2001.02 ע' אופנבכר, ס' ברק – דיסאינפלציה ויחס ההקרבה : מדינות מפותחות מול מדינות מתעוררות

2001.03 D. Elkayam – A Model for Monetary Policy Under Inflation Targeting: The Case of Israel

2002.01 ד' אלקיים, מ' רגב, י' אלאשווילי – אמידת פער התוצר ובחינת השפעתו על האינפלציה בישראל בשנים האחרונות

2002.02 ר' שטיין – אמידת שער החליפין הצפוי באמצעות אופציות Call על שער ה-Forward

2003.01 ר' אלדור, ש' האוזר, מ' קהן, א' קמרה – מחיר אי-הסחירות של חוזים עתידיים (בשיתוף הרשות לניירות ערך)

2003.02 R. Stein - Estimation of Expected Exchange-Rate Change Using Forward Call Options

2003.03 ר' שטיין, י' הכט – אמידת ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר הגלומה במחירי האופציות

2003.04 D. Elkayam – The Long Road from Adjustable Peg to Flexible Exchange Rate Regimes: The Case of Israel

2003.05 R. Stein, Y. Hecht – Distribution of the Exchange Rate Implicit in Option Prices: Application to TASE

2004.01 א' ארגוב – מודל לחיזוי הגירעון המקומי של הממשלה

2004.02 י' הכט, וה' פומפושקו – נורמליות, רמת סיכון שכיחה ושינוי חריג בשער החליפין

2004.03 D.Elkayam ,A.Ilek – The Information Content of Inflationary Expectations Derived from Bond Prices in Israel

2004.04 ר. שטיין – ההתפלגות הצפויה של שער החליפין שקל-דולר, התפלגות א-פרמטרית הגלומה באופציות מטבע חוץ

Bank of Israel – Monetary Department
POB 780 91007 Jerusalem, Israel

בנק ישראל – המחלקה המוניטרית
ת"ד 780 ירושלים 91007