בנק ישראל חטיבת המחקר

שדרוג המודל לאמידת עקום התשואות המיושם בבנק ישראל[1]

אנה ברודסקי* נדב שטיינברג**

ניירות תקופתיים 2011.01
ספטמבר 2011

[1] בנק ישראל, http://www.boi.org.il

* חטיבת המחקר, אנה ברודסקי – ana.brodesky@boi.org.il, טלפון – 02-6552609
** חטיבת המחקר, נדב שטיינברג – nadav.steinberg@boi.org.il, טלפון – 02-6552587

המחברים אסירי תודה לרועי שטיין, שתרם את הרעיון לעבודה והנחה אותנו לאורכה, לאביגל כספי, שסייעה בטיפול בנתונים התוך-יומיים ובזיהוי תצפיות חריגות, להלנה פומפושקו, שסייעה לנו בשלבים השונים של העבודה ותרמה מניסיונה ומהידע הרב שלה בנושא, ולצבי וינר ואבי וואהל – על עצותיהם המועילות.

הדעות המובעות במאמר זה אינן משקפות בהכרח את עמדת בנק ישראל

חטיבת המחקר, בנק ישראל ת״ד 780 ירושלים 91007
Research Department, Bank of Israel, POB 780, 91007 Jerusalem, Israel

שדרוג המודל לאמידת עקום התשואות המיושם בבנק ישראל

אנה ברודסקי ונדב שטיינברג

תקציר

אמידת עקום התשואות של איגרות חוב ממשלתיות וגזירת ריביות הפורוורד ממנו יש בה כדי לספק, הן למשקיעים והן לקובעי המדיניות, מידע חשוב על משתני מקרו מרכזיים, וביניהם נקודת האיזון של האינפלציה (Break-Even Inflation). על כן עקום התשואות הנגזר ממודל האומד את התשואות הריאליות והנומינליות במשק משמש כלי מרכזי לניתוחים כלכליים. בעבודה זו אנו מציעים מודל האומד את עקום התשואות בשיטה הא-פרמטרית, ובזאת משפר את המודל שהציעו Wiener & Pompushko (2006), המשמש את המדיניות המוניטרית בבנק ישראל. במאמר זה מוצעים חמישה שיפורים, הבאים לפתור חמש בעיות פוטנציאליות הקיימות במודל של Wiener & Pompushko:

- רשת משתנה של ריביות פורוורד, המקטינה את התנודתיות של התוצאות המתקבלות.
- אופטימיזציה המתמקדת בתשואות של איגרות החוב ולא במחירים.
- שימוש בפולינום מסדר גבוה יותר לתיאור המקטעים בעקום, במקום בפונקציה ליניארית.
- קנס משתנה על חוסר החלקה בטווחים השונים של העקום, כך שחלקו הקצר יהיה גמיש יותר וחלקו הארוך יהיה נוקשה יותר, בהתאם למאפייני העקום.
- שיטה חדשה לניפוי תצפיות חריגות.

מבדיקות אמפיריות נראה שהמודל המשופר מביא לקבלת עקום חלק ועם סטיות נמוכות של מחירי האיגרות המחושבים במודל ביחס למחירי האיגרות הנדגמים בשוק. בדיקה בהשוואה למודל המשמש כיום את בנק ישראל מלמדת שהתשואות המחושבות בשני המודלים דומות מאוד.

Improving the yield curve estimation model implemented at the Bank of Israel

Ana Brodesky and Nadav Steinberg

Abstract

Estimating the government bond yield curve, and deriving forward interest rates from it, can provide both investors and policy makers with important information on principal macroeconomic variables, including the break-even inflation rate. As such, the yield curve derived from a model which estimates the real and nominal yields in the economy serves as a major tool for economic analyses. In this paper, we propose a model for estimating the yield curve through a nonparametric method, improving on the model proposed by Wiener and Pompushko (2006), which is used for determining monetary policy at the Bank of Israel. This paper proposes five improvements, which solve five potential problems with the Wiener and Pompushko model:

- A changing grid of forward interest rates, which reduces the volatility of the results.
- Optimization which focuses on bond yields rather than prices.
- The use of a higher order polynomial to describe segments of the curve, instead of a linear function.
- A varying penalty on lack of smoothness in the various parts of the curve, so that its short end will be more flexible and its long end will be more rigid, in line with the characteristics of the curve.
- A new method for screening outliers.

Empirical tests show that the improved model results in a smooth curve and with low deviations of bond prices calculated in the model from bond prices in the market. A test comparing the model with the one currently used by the Bank of Israel shows that the yields calculated by both models are very similar.

1. מבוא

1.1. שיטות לאמידת עקום התשואות

עקום התשואות הנגזר מאיגרות חוב ממשלתיות סחירות הוא כלי מרכזי לניתוחים כלכליים, לתמחור נכסים אחרים ולגזירת ציפיות השוק לגבי משתני מקרו מרכזיים. עקום התשואות המקובל בספרות המקצועית מחושב על בסיס איגרות חוב נטולות קופונים (zero coupon bonds) ומשמש להיוון זרמי תשלומים עתידיים. עקום תשואות זה מחשב מחירים לאיגרות חוב סינתטיות (איגרות חוב ללא קופון) ומתבסס על איגרות חוב ממשלתיות הנושאות קופונים קבועים. ישנן שתי שיטות עיקריות לאמידת עקום האפס – שיטה פרמטרית ושיטה א-פרמטרית (על פי Bank for International Settlements, 2005).

בשיטה הפרמטרית נאמד העקום בכללותו ע"י אוסף פרמטרים יחיד. השיטה הפרמטרית המקובלת בעולם האקדמי ובשוק ההון מבוססת על מאמרם של Nelson and Siegel (1987) או על ההרחבה של גישה זו אצל Svensson (1994,1995). שיטה זו מיושמת במרבית הבנקים המרכזיים במדינות המדווחות ל-BIS על תוצאות אמידת העקום בהן (Bank of International Settlements, 2005) .

בשיטה הא-פרמטרית נאמד העקום מִקְטע-מקטע (piecewise) ע"י פונקציית spline (McCulloch, 1975)). ניתן לאמוד את העקום ישירות על ריביות הפורוורד או ריביות הספוט (spot) או לאמוד את פונקציית ההיוון (discount function)[1] . לרוב נהוג לאמוד את העקום על ריביות הפורוורד ((Fisher, Nychka and Zervos, 1995Anderson and Sleath (2001). במסגרת הגישה הא-פרמטרית מקובל היום השימוש בשיטה של "smoothing splines", ואותה אנו מציעים ליישם גם לגבי השוק הישראלי. שיטה זו משמשת את הבנקים המרכזיים של ארה"ב, יפן ובריטניה (Bank of International Settlements, 2005).

1.2. מודל 'עקום האפס' בבנק ישראל

בבנק ישראל מיושמת מאז שנת 2005 השיטה הא-פרמטרית לאמידת עקום האפס על פי המאמר של (Wiener & Pompushko,2006, להלן WP). המודל שהציעו WP מתבסס על חיבור ריביות פורוורד באופן חלק (smooth forward splines curve). בשיטה זו מחפשים ריביות פורוורד שיתאימו למחירים בשוק מחד גיסא, אך שהעקום העובר דרכן יהיה חלק ככל האפשר, מאידך; זאת באמצעות פונקציית קנס, המתחשבת הן בסטיית המחירים של איגרות החוב הממשלתיות המחושבים על פי ריביות הפורוורד מהמחירים הנדגמים בשוק, והן בתנודתיות של ריביות הפורוורד המתקבלות במסגרת המודל.

בשוק הישראלי נסחרות איגרות חוב בעלות קופונים קבועים, הן נומינליות והן ריאליות – איגרות חוב הצמודות למדד המחירים לצרכן. לפיכך ניתן לחשב עקום אפס לכל סוג הצמדה. השימוש בתוצאות משני העקומים מאפשר לבנק ישראל לגזור את ה-Break Even Inflation (נקודת האיזון של האינפלציה) לתקופות שונות בעתיד.

[1] להרחבה על הקשר המתמטי בין הפונקציות השונות ראו נספח 1: "עקום האפס ומחירי האג"ח".

בניגוד לשווקים מפותחים גדולים, שוק איגרות החוב הממשלתיות בישראל לקה בתקופות שונות בסחירות נמוכה בחלקים מסוימים של העקום, ובפרט באיגרות החוב הצמודות למדד. (להרחבה בנושא המאפיינים הייחודיים של שוק איגרות החוב הממשלתיות בישראל ומדידת נזילותו ראו: גמרסני, 2010.) המשמעות היא שמחיריהן של איגרות יכולים לשקף אינפורמציה חלקית, בגלל מיעוט המסחר שהתבצע. (ככל שהאיגרת סחירה יותר נצפה שמחירה ייטיב יותר לבטא את השווי העדכני ביותר שמייחסים לה המשקיעים בשוק.) כן אפשר שבימים מסוימים לא יתבצעו עסקאות באחת או יותר מהאיגרות בחלק מסוים של העקום, כך שבימים אלו כל אותו חלק של העקום יתבסס על אינטרפולציה. בהקשר זה עולה גם החשש שמחיריהן של איגרות החוב הפחות סחירות משקפים תשואות הכוללות גם פרמיית נזילות (Subramaninn 2001). המודל של WP מתמודד עם חוסר הסחירות בשתי דרכים:

א. פונקציית הקנס במודל מתחשבת בין השאר בסחירות היחסית של כל איגרת חוב; משקל הקנס על סטייה של המחיר הסינתטי (המחושב במודל) מהמחיר בפועל (המחיר בשוק) גדול יותר לגבי איגרות בעלות היקפי מסחר גדולים יותר, שבהן המחיר בשוק צפוי לשקף ביתר דיוק את הערכות השחקנים בשוק.

ב. מושמטות איגרות חוב בעלות מחיר חריג תוך שימוש באמצעים סטטיסטיים לזיהוי תצפיות חריגות.

בהמשך העבודה נתאר שינויים שהוכנסו במודל ביחס לנייר של WP. חלק מהם כבר מיושמים במודל המחושב כיום בבנק ישראל. חשיבותו של עקום האפס ככלי לגזירת ציפיות השחקנים בשוק לגבי משתני מקרו מרכזיים הופכת את אמידת העקום לאתגר חשוב; כל התקדמות בנושא זה תביא תועלת בניהול המדיניות המוניטרית.

המסמך בנוי כדלקמן: בפרק השני נציג בעיות וסוגיות במודל 'עקום האפס' אצל WP, ובפרק השלישי נציג כיצד התמודדנו עם חלקן; במסגרת זו נרחיב בסוגיית הכמות ומיקום השנתות במודל, נתאר את פונקציית הקנס על שני חלקיה (סטיית המחירים וההחלקה) ונתמקד בסוגיה של ניפוי תצפיות חריגות. הפרק הרביעי מציג תוצאות אמפיריות מהמודל לאחר החלת השיפורים שהוצגו בפרק השלישי ביחס לגרסה מוקדמת יותר של המודל. הפרק החמישי מסכם.

2. בעיות וסוגיות במודל

בפרק זה נדון במספר סוגיות העולות ממודל WP שטופלו במסגרת המודל המשודרג.

1. אמידת עקום התשואות באמצעות חיבור ריביות הפורוורד מתבססת על פרישת רשת (grid) של טווחים לפדיון, שבה כל שנתה (node) מתייחסת לטווח-לפדיון. במודל נעשה שימוש ברשת קבועה. משמע שהטווחים לפדיון שבהם מחושבים הפורוורדים נבחרו מראש. בפועל, בשל מיעוט הסדרות הנסחרות בחלקים מסוימים של העקום ייתכן שלא יהיו איגרות חוב בין שתי שנתות על הרשת. התוצאה היא אמידת פרמטר שאינו תורם לחישוב מדויק יותר של מחירי האיגרות, אבל עלול להוסיף תנודתיות מיותרת לעקום.
2. פונקציית הקנס המשמשת לביצוע האופטימיזציה במודל מתבססת על ההפרש בין מחירי איגרות החוב המחושבים במסגרת המודל לבין מחיריהן בשוק. (פונקציית הקנס כוללת גם קנס על חוסר החלקה של עקום הפורוורד, אך חלקו נמוך יחסית. על כן, לצורך הדיון בסעיף

הנוכחי נתעלם מחלק זה של פונקציית הקנס ונתמקד בקנס על הסטייה במחירים.) כיוון שעקום התשואות משמש אינדיקטור לניתוח ולמעקב לצורך גיבוש המדיניות המוניטרית, חשוב לבצע את האופטימיזציה על התשואות ולא על המחירים. הקשר בין מחירים לתשואות ניתן לתיאור באמצעות המח״ם (משך החיים הממוצע)[2]: ככל שה-מח״ם ארוך (קצר) יותר כך הגמישות של תשואת האיגרת ביחס למחיר שלה נמוכה (גבוהה) יותר. אם הסטיות במחירים של שתי איגרות חוב בעלות מח״מים שונים הן בשיעורים זהים, אזי הסטייה בתשואה של האיגרת הקצרה תהיה גדולה יותר.

3. החלק השני של פונקציית הקנס הוא הקנס על חוסר ההחלקה של עקום הפורוורד הנאמד. המקטע שבין כל שתי שנתות בעקום הפורוורד מתואר במודל על-ידי פונקציה ליניארית. כל ריבית פורוורד מהווה קומבינציה ליניארית (או, במילים אחרות, ממוצע משוקלל) של שתי ריביות הפורוורד הנמצאות מימינה ומשמאלה על הרשת שהוגדרה. שיטה זו לתיאור העקום היא אמנם פשוטה יחסית לחישוב, אבל לא מציאותית די הצורך, לטעמנו. בפרט, הנגזרות הראשונות של שני קטעים הנפגשים באותה שנתה על הרשת לא מוכרחות להיות זהות, והתוצאה היא חוסר רציפות בשיפוע עקום הפורוורד[3] המלווה במבנה ׳משונן׳ (saw tooth) של העקום. חיסרון נוסף של הבחירה בפונקציה ליניארית הוא שמדובר בפונקציה הניתנת לגזירה לכל היותר פעם אחת. על כן, איננו יכולים להשתמש בנגזרות גבוהות יותר של העקום כדי ״להחליקו״. פונקציית הקנס שהציעו WP כוללת קנס בגין שינויים חדים מדי בשיפוע עקום הפורוורד לאורכו (ע״י השוואת השיפוע בכל מקטע של העקום), אבל קנס זה לא מתחשב באורך המקטעים. כאשר נסחרות בשוק איגרות חוב רבות, וכתוצאה מכך אנחנו משתמשים ברשת עם שנתות רבות, השימוש בקווים ליניאריים בין השנתות יוצר עקום בעל צורה סבירה, אבל כאשר מספר אגרות החוב, ובעקבותיו מספר השנתות על הרשת, נמוך יותר, הבחירה בפונקציה ליניארית מתבטאת בעקום הסוטה מההיגיון הכלכלי, ויוצר הטיות בתשואות, בעיקר בטווחים הארוכים. ניתן לפתור בעיה זו באופן חלקי באמצעות נרמול באורך הכולל של שני המקטעים הנבחנים. יחד עם זאת, שימוש בפונקציה בעלת סדר רציפות גבוה יותר, הרווח בספרות (לדוגמה: Anderson & Sleath, 2001), יאפשר החלקה טובה יותר של העקום.

4. החשיבות היחסית של כל אחד משני החלקים המרכיבים את פונקציית הקנס תלויה במשקל שנבחר לקנס על חוסר ההחלקה, כאשר משקל של 1 פירושו מתן משקלות שווים לשני חלקי פונקציית הקנס. במודל, כפי שהוא מתואר אצל WP, משקל הקנס על חוסר ההחלקה בפונקציית הקנס אכן קבוע ושווה ל-1. אחידות משקל הקנס על פני הטווחים השונים לפדיון עשויה להיות בעייתית, משום שהיא תצמצם את הגמישות בחלקו הקצר של העקום.

5. שוק איגרות החוב בישראל התפתח מאוד בשנים האחרונות, וההון הרשום של כל הסדרות בריבית קבועה הנסחרות כיום בשוק הוא למעלה ממיליארד ש״ח ע״נ, אבל עדיין אין לו העומק המאפיין את שוקי איגרות החוב של כמה מהמדינות המפותחות בעולם. כתוצאה מכך עלולים להיווצר מצבים שבהם המחיר יסטה מהמחיר שהיה מתקבל בשוק משוכלל. הואיל

[2] כאן ובהמשך אנו מתייחסים ל modified duration: מח״ם מקולי חלקי (1 ועוד התשואה לפדיון של האיגרת).

[3] חשוב לציין שמצב זה פחות בעייתי מהמצב שהיה מתקבל לו השתמשנו בפונקציה ליניארית לתיאור עקום האפס עצמו (התשואות), משום שבמקרה כזה היינו מקבלים עקום פורוורד לא רציף.

ובשוק מצויות סדרות בעלות היקפים שונים של ההון הרשום למסחר, מידת הסחירות משתנה לאורך העקום – עובדה שעשויה להשפיע על צורת העקום. כדי להתמודד עם התופעה, כלומר למנוע הטיה בצורת העקום, דרוש לנו מנגנון אוטומטי שיאפשר השמטה של איגרות חוב חריגות במיוחד.

במודל של WP מנופות איגרות החשודות כחריגות, עקב תשואה לפדיון שלילית, נפח מסחר נמוך או שינוי חריג במחיר. השיטה שמציעים WP לאיתור שינויים חריגים במחירים מתבססת על פרוצדורת STATESPACE בתוכנת SAS. התוכנה בוחנת את השינוי במחירי איגרות החוב בחודשיים הקודמים, ומפיקה, באמצעים סטטיסטיים, תחזית למחיר הצפוי של כל איגרת. לאחר ביצוע התחזית נבחן הפער בין התחזית למחיר האיגרת בפועל. כל איגרת שהשארית שלה בערך מוחלט גבוהה פי 3 ויותר מהערך המוחלט של ממוצע השאריות של כלל האיגרות באותו היום מנופה מהאמידה[4].

השיטה שמציעים WP לזיהוי שינויים חריגים במחיר אמנם מתבססת על שיטות סטטיסטיות מתקדמות ומקובלות, אך לוקה במספר חסרונות:

- השיטה מורכבת יחסית וקשה לשחזור.
- השוואת הסטייה של כל איגרת מהתחזית לגביה לממוצע הסטיות מהתחזית עשויה להוביל לניפויים מיותרים של איגרות חוב בתקופות של שינויים בסביבה הכלכלית (לדוגמה: תנועה לא מקבילית בעקום התשואות, לאחר תקופה של יציבות או תזוזות מקבילות בעקום). מבחינה אמפירית אכן נמצא ששיטה זו מובילה להשמטת איגרות חוב רבות יחסית.
- הניפוי מתבסס רק על השינויים במחירי איגרות החוב, ולא על השפעתם על אמידת העקום.

3. פירוט השינויים שהוכנסו במודל

לשם פתרון הבעיות שתוארו לעיל הוכנסו במודל מספר שיפורים: מעבר לרשת (grid) דינמית ברובה, הוספת התייחסות למח"ם בחישוב הקנס וכן שינויים שמטרתם יצירת עקום תשואות "חלק" יותר, המתיישב עם ההיגיון הכלכלי[5].

3.1. מספר השנתות במודל ומיקומן

מודלים מסוג spline משמשים לאינטרפולציה של אוסף חלקי של תצפיות ע"י קבוצה של פולינומים, המחוברים ביניהם בנקודות "קשר".

בבחירת מספר השנתות על הרשת שישמשו כנקודות ה"קשר" יש תחלופה בין דיוק רב יותר במחירים, המושג באמצעות מספר שנתות גדול יותר, לבין התנודתיות של העקום, שעולה עם

---

[4] לפירוט נוסף לגבי ניפוי תצפיות חריגות במודל של WP ראו Wiener & Pompushko (2006) עמ' 10–11.

[5] שינוי נוסף קשור באופן היישום של המודל: Wiener & Pompushko יישמו את המודל שלהם בתוכנת סאס ואילו אנחנו יישמנו את המודל עם השיפורים המוצעים בנייר זה בתוכנת מטלאב. להבדל זה אין להערכתנו השפעה על התוצאות המתקבלות מהמודל ומטרתנו בשימוש במטלאב הייתה אך ורק לשפר את הנגישות של המודל לציבור הכלכלנים בבנק ומחוצה לו.

העלייה במספר השנתות[6]. WP עשו שימוש ברשת קבועה של ריביות פורוורד. בפועל, בשל מיעוט הסדרות הנסחרות בחלקים מסוימים של העקום, ייתכן שלא יהיו איגרות חוב בין שתי שנתות (nodes) על הרשת. התוצאה היא הוספת פרמטר שאינו תורם לחישוב מדויק יותר של מחירי האגרות, אבל עלול להוסיף תנודתיות מיותרת לעקום.
אנו פותרים בעיה זו באמצעות שימוש ברשת דינמית: מיקומי השנתות על הרשת נקבעים בכל יום עפ"י התקופות-לפדיון של איגרות החוב הנסחרות באותו היום. הרשת נבנית בנפרד לעקום הנומינלי ולעקום הריאלי, ומיקומי השנתות ברשת הנומינלית וברשת הריאלית לא מוכרחים להיות זהים. לכל רשת נקבעו מיקומים אפשריים של השנתות, אבל ההחלטה שביום מסוים שנתה מסוימת תהיה על הרשת תלויה בקיומה של איגרת כלשהי, המשמשת לחישוב המודל באותו היום, שהטווח לפדיון שלה קצר מהטווח לפדיון של אותה השנתה וארוך מהטווח לפדיון של השנתה שבאה לפניה השנתות המשמשות בעקום הנומינלי הן: 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20 , ורק השנתה של האפס קבועה. השנתות המשמשות בעקום הריאלי הן: 0, 0.5, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30; השנתות 0, ו-1 הן קבועות (כלומר ישמשו לצורך החישוב גם אם אין איגרות חוב ריאליות שזמן פדיונן פחות מחצי שנה או בין חצי שנה לשנה, בהתאמה), והשנתה של 0.5 מתווספת כאשר יש לפחות איגרת חוב ריאלית אחת שהטווח-לפדיונה הוא בין 0.5 ל-1 שנה; זאת כדי להבטיח גמישות מספקת בחלקו הקצר של העקום הריאלי. בהקשר זה חשוב לשים לב כי בחלקו הקצר של העקום יש יותר שנתות מאשר בחלקו הארוך של העקום. כתוצאה מכך מתאפשרות גמישות רבה יותר בחלקו הקצר של העקום ויציבות רבה יותר בחלקו הארוך. בניסוחו של Waggoner (1997):

"By controlling number and spacing of node points, one can reduce oscillations at longer maturities, while retaining flexibility at shorter maturities".

3.2. סטיית העקום מהמחירים בשוק

כדי לקבל עקום הקרוב ככל הניתן למחירים בשוק WP עושים שימוש בפונקציית קנס הכוללת – נוסף על רכיב חוסר ההחלקה – רכיב המתבסס על ההפרש בין מחירי איגרות החוב המחושבים בהתבסס על עקום ריביות הפורוורד הנגזר מהמודל לבין המחירים של איגרות אלה בשוק. המשמעות היא שהאופטימיזציה נעשית על המחירים. עם זאת, כיוון שעקום התשואות משמש אינדיקטור לניתוח ולמעקב לצורך גיבוש המדיניות המוניטרית, חשוב לבצע את האופטימיזציה על התשואות ולא על המחירים. הקשר בין מחירים לתשואות ניתן לתיאור באמצעות המח"ם של איגרת החוב. ככול שהמח"ם של האיגרת ארוך יותר שינוי במחירה ישפיע פחות על תשואתה ולהפך[7]. מאחר שהמודל המקורי של WP אינו מתייחס לסוגיה זו, האופטימיזציה (כשכל שאר הדברים קבועים) מייחסת משקלות זהים לאיגרות עם מח"מים שונים, וזאת אף על פי שסטיות בגדלים זהים במחיר יובילו לסטייה גדולה יותר בתשואה של האיגרות הקצרות. מצב זה הוא

---

[6] כך, Subramanian (2001) מקבל סטיות גדולות מהמחירים בפועל בשוק ההודי כשהוא משתמש ברשת הכוללת מספר מועט במיוחד של שנתות. התנודתיות הגבוהה יותר של העקום תלווה בשאריות גדולות יותר בבחינה של אגרות חוב מחוץ למדגם (out of sample residuals) כפי שמסבירים Fisher, Nychka & Zervos (1994).

[7] ההיגיון כאן פשוט: סטייה קלה במחירה של איגרת שתיפדה בשנה הקרובה תתבטא כולה בתשואה בשנה הקרובה ולכן תשפיע בחוזקה על התשואה לפדיון, ואילו סטייה קלה במחירה של איגרת שתיפדה בעוד 30 שנים תתפרס על פני תקופה ארוכה זו, ולכן ההשפעה על התשואה השנתית לפדיון תהיה זניחה.

בעייתי במיוחד, משום שדווקא החלק הקצר של העקום משמש לחישוב נקודת האיזון של האינפלציה לשנה, שהיא תשומה מרכזית לקביעת המדיניות המוניטרית.

הדגשת הדיוק הנדרש בתשואה, ולא במחירים, בבניית עקום תשואות, בשיטת ה- smoothing, splines המוצעת להלן, לא זכתה להתייחסות מספקת בספרות המחקרית. יוצא מכלל זה Waggoner (1997), שמציע להשתמש במשקלות המבוססים על ההופכי של המח״ם.

אנחנו מחשבים את המח״ם לפי הנוסחה הבאה:

$$Dur = \left(\frac{\sum_{t=1}^{\tau} \frac{c_t}{(1+y)^t} \cdot t}{P} \right) \Big/ \left(1 + \frac{y}{n}\right)$$

כאשר:

$c_t =$ t תזרים המזומנים שהאיגרת צפויה לתת בתקופה

$y =$ התשואה-לפדיון של איגרת החוב

$P =$ מחיר השוק של האיגרת

$n =$ מספר תשלומי הריבית בשנה

בהמשך לשיקולים שציינו לעיל, בחישוב הקנס בגין סטיות המחירים במסגרת האופטימיזציה אנו מכפילים כל איגרת חוב במשקל (מתוקנן) השווה ל- $1/(Dur+1)$[8].

נוסף על המשקל המבוסס על המח״ם, אנחנו משתמשים במשקל שני, השווה למחזור המסחר היומי היחסי של כל איגרת, בדומה להצעתם של WP. זאת במטרה לייחס משקל גדול יותר לאיגרות הסחירות, וכך להתמודד עם הבעיות הנובעות מרמות סחירות נמוכות בחלק מהסדרות. בכך אנחנו הולכים בעקבות WP, אף שסוגיית הסחירות אינה נדונה במרבית המחקרים בנושא. הסיבה לכך היא שבניגוד לשווקים המפותחים הגדולים (ארה״ב ובריטניה), שבהם מתמקדים מרבית המחקרים, השוק בישראל עדיין לוקה בסחירות נמוכה יחסית בכללותו, ולעיתים – בסחירות נמוכה במיוחד רק בחלק מהסדרות הקיימות, שעלולה להוביל לעיוותים בבניית העקום[9]. עם זאת אנו מבצעים התאמה מסוימת למשקלות המבוססים על מחזור המסחר, שהציעו WP: כדי למנוע מצב שבו איגרת כלשהי שמחזור המסחר בה היה גדול במיוחד תקבל משקל מוגזם בפונקציית הקנס, הגדרנו מקסימום ,משקל מרבי של 20% למחזור המסחר של כל איגרת.

---

[8] אפשרות חלופית הייתה להשתמש לא בהפרש בין המחיר המחושב למחיר בפועל בריבוע, אלא בהפרש בין התשואה לפדיון הנגזרת מהמחיר המחושב לבין זו הנגזרת מהמחיר בפועל. ראו: Bolder & Streliski (1995) Svensson (1999).

[9] Subramanian (2001) מתייחס לבעיה דומה של חוסר סחירות בשוק ההודי. בדומה ל- WP הוא מתייחס למחזור היחסי של כל איגרת חוב, אבל בשונה מהם הוא מתייחס גם למספר העסקאות. בניגוד ל -WP בוחר Subramanian להשתמש בפונקציה לא מונוטונית למשקלות המסחר - הוא משתמש בטנגנס ההיפרבולי כדי לייחס משקל גבוה ודומה לכל האיגרות הסחירות יחסית, ומשקל היורד במהירות גוברת לאיגרות הסחירות פחות. אנחנו בחרנו בשלב זה להמשיך בשיטה שהציעו WP, אבל בעתיד ניתן לבחון חלופות שונות, בהן זו שמציע Subramanian.

3.3 החלקת העקום

3.3.1 בחירת התיאור הפונקציונלי של עקום הפורוורד

העקום נבנה על ידי אוסף של פולינומים, המחוברים זה לזה בנקודות הקשר באופן "חלק". בדרך זו מתאפשרת גמישות רבה יותר בבניית העקום, מפני שכל מקטע בפולינום נבנה כמעט באופן עצמאי, וניתן להגביל את ההשפעה של שינויים בריבית בטווח לפדיון מסוים על הריביות בטווח אחר לפדיון. במודל, כפי שהוא מתואר אצל WP, נעשה שימוש בפונקציות ליניאריות (פולינום מדרגה ראשונה) לתיאור המקטע שבין כל שתי שנתות בעקום הפורוורד, והתוצאה היא, כאמור, חוסר רציפות בשיפוע עקום הפורוורד, המלווה במבנה 'משונן' (saw tooth) של העקום. עם-זאת WP מציינים שניתן ליישם את המודל שלהם גם על סוגים אחרים של אינטרפולציה בין השנתות על הרשת. לפי הגישה המקובלת בספרות המחקרית בתחום, וכן בבנקים מרכזיים ובגופים פיננסיים אחרים, נראה שהשימוש בפונקציות ליניאריות אינו רווח. לעומת זאת חוקרים שונים, החל ב-McCulloch (1975), הציעו את השימוש ב-cubic splines (spline המבוסס על חיבור פולינומים מדרגה שלישית) לבניית העקום. גישה זו תאפשר את השימוש בנגזרת השנייה של עקום הפורוורד כדי לקנוס בגין חוסר חלקלקות. (ראו בפסקה הבאה.) בגישה זו גם מתקבל ביטוי פונקציונלי ברור לטווחים לפדיון שאינם נסחרים בפועל בשוק, המבטא את התנהגות העקום בטווחים לפדיון הסמוכים. הגישה שמוצעת במאמר הנוכחי מסתמכת ספציפית על השיטה הנהוגה כיום בבנק המרכזי של בריטניה ((Anderson & Sleath 2001,).

<u>הגדרה פורמלית של הפולינום הנאמד</u>

נגדיר פונקציה spline מדרגה שלישית, F, על הנקודות $t_1 < t_2 < .... < t_{n+1}$:

$$(1) f \in [t_1, t_{n+1}]$$

$$(2) f_i^{(j)}(t_{i+1}) = f_{i+1}^{(j)}(t_{i+1}) \qquad j = 1,2,3; \quad i = 1,2,..n$$

כאשר לכל i, $f_i(t)$ הוא פולינום ממעלה שלישית. משמע שבכל נקודת חיבור של שני פולינומים ערכי הפולינומים יהיו שווים, וכן יתקיים שוויון בין שתי הנגזרות הראשונות שלהם.

$t_1 < t_2 < .... < t_{n+1}$ – השנתות על הגריד שבהן מוערכים הפורוורדים, הנקבעות כפי שהסברנו לעיל.

התנאים הנ"ל מגדירים 4n פרמטרים, ו-4n-2 משוואות ליניאריות. לכן, כדי למצוא פתרון יחיד יש צורך בשני תנאים נוספים.

אפשרות אחת היא להוסיף את שני תנאי הקצה הבאים :

$$f_1^{(2)}(t_1) = 0$$
$$f_n^{(1)}(t_{n+1}) = 0$$

המוטיבציה לתנאי השני מקורה ברצון להגביל את העקום לכדי התכנסות (התיישרות) בטווחים הארוכים לפדיון.

ערכי הפורוורד ההתחלתיים שמהם מתחילה האופטימיזציה בכל יום הם ערכי הפורוורד שהתקבלו ביום המסחר הקודם[10].

3.3.2 הקנס על חוסר ההחלקה

הקריטריון הבסיסי ביותר לבחינת טיב עקום התשואות הוא כמובן התאמתו לנתונים בפועל. הבעיה היא שכאשר פונקציית הקנס 'מענישה' רק על סטייה מהמחירים בפועל, עלול להתקבל עקום מדויק מבחינת המחירים, אבל תנודתי מאוד לאורכו. עקום כזה לא מתיישב עם "ההיגיון הכלכלי", בעיקר בטווחים הארוכים, וביצועיו בבדיקות 'מחוץ למדגם' (out of sample) צפויים להיות מאכזבים. כדי לפתור בעיה זו הציעו חוקרים שונים, החל ב- Fisher, Nychka & Zervos (1995), לכלול במסגרת האמידה גם קנס בגין חוסר חלקלקות של העקום (roughnesspenalty).
פונקציית הקנס שהציעו WP כוללת קנס על חוסר החלקה מהצורה:

$$Q(f)=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{f(t_{i+1})-f(t_i)}{t_{i+1}-t_i}-\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right)^2$$

קנס זה מבטא את השינוי בריבוע בשיפוע של עקום הפורוורד בין שני מקטעים לאורך העקום[11], אבל לא מתחשב באורך המקטעים הנבחנים. אפשר לפתור בעיה זו באמצעות נרמול הנוסחה שבסוגריים באורך הכולל של שני המקטעים הנבחנים. בפועל, מאחר שאנחנו לא משתמשים בהחלקה ליניארית בין הפורוורדים אלא בפולינומים ממעלה שלישית, הפונקציה שלנו ניתנת לגזירה פעמיים בכל נקודה ולכן במקום הקירוב שבו השתמשו WP או השיפור שהצענו לעיל, ניתן להשתמש בנגזרת השנייה של עקום הפורוורד, ולמזער את הסכום (אינטגרל במקרה הרציף) של הנגזרות השניות בריבוע של עקום הפורוורד.
בסיכום, השימוש בשיטת ה-smoothing spline ממעלה שלישית מאפשר לנו לקבל עקום חלק יותר מאשר בגישה הקיימת, משתי סיבות:

1) התיאור הפונקציונלי של העקום כ-spline מייצר עקום חלק יותר מאשר באינטרפולציה ליניארית.
2) דרגת הגזירות של ה-spline מאפשרת לנו שימוש בפונקציית קנס יעילה יותר בגין אי החלקה.

---

[10] Thomas & Sample (2000) מתייחסים לסוגיה של ערכים התחלתיים לאופטימיזציה בהקשר של אמידת עקום התשואות בשיטת Nelson-Siegel ומוצאים כי הפרמטרים שנמצאו אופטימאליים ביום המסחר הקודם הם היעילים ביותר לשימוש כערכים התחלתיים באופטימיזציה.

[11] קנס זה הוא ההפרש בריבוע בין ה-tg של הזוויות הנוצרות בין כל שלושה פורוורדים סמוכים על העקום.

3.3.3 משקל הקנס על חוסר ההחלקה

במודל, כפי שהוא מתואר אצל WP, משקל הקנס על חוסר ההחלקה לאורך העקום קבוע ושווה ל-1. מבחינות אמפיריות עולה כי לרוב סדר הגודל של הקנס על חוסר ההחלקה נמוך בהרבה מסדר הגודל של הקנס על הסטייה מהמחירים, וכתוצאה מכך משקולת של 1 מביאה להתמקדות האופטימיזציה בדיוק של העקום ביחס למחירים בפועל, על חשבון החלקלקות שלו.

Fisher, Nychka & Zervos (1995) מדגישים את חשיבות הקנס על חוסר ההחלקה להשגת עקום בעל צורה הגיונית, ומציעים לבחור את המשקל של הקנס על חוסר ההחלקה באמצעות GCV- generalized cross validation. Waggoner (1997) מאמץ את גישתם בעניין חשיבות הקנס על חוסר ההחלקה, אבל מוסיף ששיטתם מובילה לבניית עקום גמיש מדי בחלקו הארוך, ובעיקר – לא גמיש דיו בחלקו הקצר. הוא מראה שכאשר פונקציית הקנס כוללת קנס קבוע ומשמעותי על חוסר החלקה, משקל הקנס על חוסר ההחלקה משפיע על גמישות העקום יותר מאשר ריכוז השנתות שעל הגריד. כתוצאה מכך, גם אם בקצהו הקצר של העקום נקבעו יותר שנתות מאשר בקצהו הארוך, ההשפעה על התוצאה תישאר מועטה, ויתקבל עקום קשיח מדי בחלקו הקצר וגמיש מדי בחלקו הארוך ביחס להיגיון הכלכלי. Waggoner מראה שכתוצאה מהוספת קנס קבוע על חוסר החלקה בשיטת GCV הטעויות המתקבלות בטווחים הקצרים בתוך המדגם (in sample) ומחוץ למדגם (out of sample) גדולות מאלה המתקבלות בעקום ללא קנס על חוסר החלקה (בדומה להצעתו המוקדמת של (McCulloch, 1975); זאת משום שהשפעת מיקום השנתות על הגריד מאבדת מחשיבותה כאשר נוסף קנס גדול וקבוע על חוסר החלקה.

כדי להתחשב באופן מפורש במידת ההחלקה של העקום, כפי שמציעים Fisher & Al. (1995) מחד גיסא, ולשמור על גמישות מספקת בקצהו הקצר של העקום, כפי שמצליח לעשות McCulloch (1975) מאידך, מציע Waggoner (1997) להשתמש בקנס משתנה על חוסר החלקה: VRP- variable roughness penalty. הוא מראה שאמצעי זה משיג תוצאות טובות כמו האמצעי של McCulloch, ואף יותר, מבחינת הסטיות מהמחירים הן בתוך המדגם (in sample) והן מחוץ למדגם (out of sample), וכן מידת החלקה מספקת.

הן מהסיבות התיאורטיות שהוזכרו לעיל והן לאור בדיקות אמפיריות על הנתונים בישראל, בחרנו לאמץ את פונקציית הקנס המשתנה שהציע Waggoner. פונקציית המשקל נבחרה בהתבסס על הפונקציה שהציע Waggoner (1997):

$$\lambda(t)=\begin{cases}0.01 & t\le 1.5\\ 1 & 1.5<t\le 10\\ 1000 & t>10\end{cases}$$ – המשקל היחסי של הקנס בגין אי-חלקלקות

במסגרת שיפורים עתידיים במודל, ניתן לחפש את ערכי λ לטווחים השונים של פונקציית הקנס המתאימים ביותר לנתוני איגרות החוב הישראליות, וזאת לפי בדיקות שיבטיחו תכונות רצויות של הפונקציה – למשל יציבות מרבית של העקום על פני זמן, וטיב מרבי של ההתאמה (goodness-of-fit).

3.4 פונקציית הקנס – סיכום

לנוכח הסוגיות שהועלו בפסקאות 3.2-3.3 לעיל, אנו מציעים להשתמש בפונקציית הקנס הבאה:

$$\sum_{i=1}^{n+1} w_i (P_i - \hat{P}_i(f))^2 + \int_0^{x_{n+1}} \lambda(t) \cdot f''(t)^2 \, dt$$

כאשר

w_i – המשקל היחסי של כל איגרת. נקבע ע"י ממוצע בין מחזור המסחר היחסי (עם תקרה של 20%) ומשקל מנורמל נוסף השווה ל- $1/(Dur+1)$ של האיגרת.

P_i – מחיר איגרת i.

$\hat{P}_i$ – המחיר הסינתטי של איגרת i.

f – עקום הפורוורד הנאמד.

λ – המשקל היחסי של הקנס בגין אי-חלקלקות, כפי שמתואר בפיסקה 3.3.3

פונקציית הקנס מבטאת את הרצון להתאים את תוצאות המודל לנתונים ולאפשר גמישות בבניית העקום מחד גיסא, כפי שבא לידי ביטוי ברכיב השמאלי של הקנס, ומאידך, לקבל עקום חלק ויציב יחסית כפי שמתבטא ברכיב הימני.

3.5. ניפוי תצפיות חריגות

הואיל וכפי שצוין לעיל, השוק המשני לאיגרות חוב בישראל עדיין אינו עמוק דיו לאורך חלקים שונים של עקום התשואה, עלולים להיווצר מצבים שבהם המחיר בשוק יסטה מהמחיר שהיה מתקבל בשוק משוכלל לגמרי. זאת ועוד, גם בנתונים המשמשים אותנו לחישוב העקום עלולות לפול טעויות טכניות שונות, שעלולות, במקרים נדירים, לחמוק מהבקרות השונות הננקטות לשם איתורן. במודל, כפי שהוא מתואר אצל WP, נעשה שימוש בשני אמצעים לצורך ניפוי תצפיות חריגות – השמטת תצפיות חריגות לפי קריטריונים קבועים והשמטת תצפיות חריגות בשיטה סטטיסטית. השיטה הסטטיסטית שמציעים WP לזיהוי תצפיות חריגות מתבססת על ייצור תחזית למחיר הצפוי של כל איגרת חוב על פי השינוי במחירה בעבר הקרוב, חישוב השארית של התחזית ביחס למחיר האיגרת בפועל ואז – זיהוי איגרות חריגות על ידי השוואת השארית שחושבה לכל איגרת לממוצע השאריות של כלל האיגרות באותו יום. חסרונה של שיטה זו נעוץ במורכבותה היחסית, ובכך שהיא מובילה להשמטת איגרות חוב רבות יחסית ועלולה להחמיץ שינויים אמיתיים בתנאי השוק. השיטה גם לא מתחשבת בהשפעת החריגות על אמידת העקום.

אנחנו מציעים להמשיך להשתמש בקריטריונים הקבועים שהציעו WP, אמנם תוך התאמות קלות[12], ולבצע שינויים בשיטה הסטטיסטית המשמשת לזיהוי איגרות חריגות. המטרה שלנו היא להשמיט מהאמידה איגרות חוב שהשינוי במחירן חורג במידה משמעותית מהשינוי הצפוי, וכן איגרות חוב שמחיריהן מתגלים כחריגים בתהליך האמידה. לשם כך נחפש איגרות חוב חריגות בשני שלבים:

[12] אצל WP מדובר על תשואה-לפדיון קטנה מאפס, מחזור מסחר נמוך וסטיות מחירים חריגות. אנחנו משמיטים איגרות עם תשואה לפדיון קטנה מאפס רק בעקום הנומינלי, משמיטים איגרות עם מחזור מסחר נמוך מ 10,000 ש"ח, משמיטים איגרות נומינליות שהטווח לפדיונן 50 ימים או פחות, איגרות ריאליות שהטווח לפדיונן 180 ימים או פחות וכן איגרות בשני ימי המסחר הראשונים שלאחר הנפקתן הראשונית.

1. לפני ביצוע האמידה נחפש איגרות חוב שמחירן חריג ביחס למחיר הצפוי.
2. אחרי ביצוע האמידה נחפש איגרות חוב שהמחיר שחושב עבורן סוטה באופן חריג ממחירן בפועל ותרומתן לקנס על המחירים חריגה.

אופן הביצוע:

לשם ביצוע השלב הראשון נריץ רגרסיה של השינוי באחוזים במחירי איגרות החוב ביחס ליום המסחר הקודם על המח״ם של איגרות החוב ועל המח״ם בריבוע. לכל איגרת נחשב את ההפרש בערך מוחלט בין שיעור השינוי במחיר האיגרת בפועל לבין התחזית הנגזרת מהרגרסיה שהרצנו. נגדיר איגרת חוב כחריגה אם ההפרש בערך, מוחלט, בין שיעור השינוי החזוי במחירה לבין שיעור זה בפועל גדול פי ארבעה ויותר מממוצע הפרשים אלה עבור כל שאר איגרות החוב באותו יום. איגרת חוב שנמצאה חריגה לא תנופה באופן אוטומטי; תחילה נבחן את נתוני המסחר התוך-יומי שלה ונבדוק אם המחיר החריג נובע מעסקה (או רצף עסקאות) ספציפית. אם החריגה נובעת מעסקה ספציפית, נשמיט אותה, נחשב את מחיר הנעילה החדש ואת המחזור החדש, ובאלה נשתמש לאמידת העקום. אם לא נמצאה עסקה חריגה, על אף זיהויו של השינוי במחיר כחריג, משתמשים לאמידת העקום, במחיר הנעילה והמחזור כפי שהם דווחו על ידי הבורסה במקור. נספח 2 מרחיב בעניין תהליך קביעת המחיר בבורסה והשימוש בנתוני העסקאות לצורך תיקון מחירים חריגים.

השלב השני של חיפוש החריגות יתבצע לאחר אמידת העקום. נגדיר כחריגה איגרת-חוב שמחירה הסינתטי הנאמד סוטה במידה חריגה ממחירה בפועל, ותרומתה לקנס על המחירים חריגה, או, לחלופין איגרת- שתרומתה לקנס אינה יוצאת-דופן, אבל המחיר הסינתטי שנאמד לגביה סוטה במידה חריגה מאוד ממחירה בפועל. פורמלית אנחנו מחשבים את החריגה לפי הנוסחה הבאה:

$$Deviation = \frac{|\hat{P} - P|}{P} \cdot \frac{100}{(1 + Dur)}$$

כאשר:

$\hat{P} =$ מחירה של האיגרת הנאמד במודל

$P =$ מחיר השוק של האיגרת

$Dur =$ המח״ם המתוקנן של האיגרת (המחושב על פי הנוסחה המתוארת בפרק 4)

האיבר הראשון משמאל בנוסחה מבטא את ההפרש, בערך מוחלט, בין המחיר הסינתטי למחיר בפועל, ומשקלל את הסטייה ביחס למחיר האיגרת: אין דין סטייה של חצי שקל באיגרת שמחירה 100 ש״ח כדין אותה סטייה באיגרת שמחירה 300 ש״ח[13]; האיבר השני משקלל את הסטייה ביחס למח״ם של האיגרת בדומה לשיטה שננקטה במשקל של פונקציית הקנס, שתוארה לעיל.

אנו מחשבים גם את התרומה לקנס, וזאת כסטייה המשוקללת (במשקלות המח״ם ומחזורי המסחר שתוארו בסעיף 3.2 לעיל) בריבוע של כל איגרת חוב מסך הקנס על הסטייה במחירים.

[13] בדומה לכך מתייחסים Thomas & Sample (2000) בפונקציית הקנס שהם מציעים לאחוז הסטייה מהמחיר בפועל ולא לסטייה עצמה.

שני התנאים שיכולים להביא להשמטה הם: (Deviation > 0.15 וגם תרומה לקנס העולה בפי 5 או יותר על ממוצע התרומות לקנס של כלל האיגרות באותו יום) או Deviation > 0.4.

לאחר ניפוי האיגרות החריגות, אם נמצאו כאלה בשלב השני, מתבצעת הרצה מחדש. ההרצות מחדש והניפויים נמשכים עד שאין עוד צורך לבצע ניפויים נוספים לפי התנאים שקבענו.

לשיטה המוצעת כאן יש מספר יתרונות:

1. מדובר בשיטה פשוטה ושקופה. הדבר מאפשר שחזור קל של התוצאות המתקבלות לשם תחקור התוצאות ובדיקת האיגרות שהושמטו, וכן איתור תקלות באמידה ובעיות דיווח ונתונים.
2. השימוש ברגרסיה ביחס ל-מח״ם ולמח״ם בריבוע מזהה שינויים חריגים במחיר. שיטה זו, בניגוד לשיטה שנקטו WP, מאפשרת גם שינויים בסביבה הכלכלית, שעשויים להתבטא בתנועה לא מקבילה של העקום.
3. שיטת הניפוי שהציעו WP אינה מתחשבת בהשפעת האיגרת הבודדת על האמידה של העקום. השיטה המוצעת כאן מזהה איגרות חוב המובילות להטיה באמידת העקום ואיגרות חוב שלגביהם העקום הנאמד אינו מצליח לבטא את מחירן בפועל במידת דיוק סבירה.
4. מבחינה אמפירית, השימוש בקריטריון שהגדירו WP הוביל להשמטת מספר גבוה יחסית של איגרות. הקריטריון החלופי שאנחנו מציעים כאן הוביל להשמטה של איגרות מעטות יחסית. בפרט, בתקופות של נתונים אמינים ויציבות יחסית של מחירי איגרות החוב לא נרשמו כלל ניפויים של איגרות חוב. כך, בשנת 2008, כתוצאה מסטייה גבוהה במחיר הסינתטי ו/או בתרומה לקנס נפלו בממוצע 0.9 סדרות ליום, בשנת 2009 ירדו 0.1 סדרות, ובשנת 2010 לא ירדו סדרות כלל. בדיקת האפשרות לתקן את מחיר הסגירה הובילה ב-2008 לתיקון מחירן של 4 איגרות, ב-2009 תוקן מחירן של 10 איגרות, וב-2010 – של 12 איגרות.

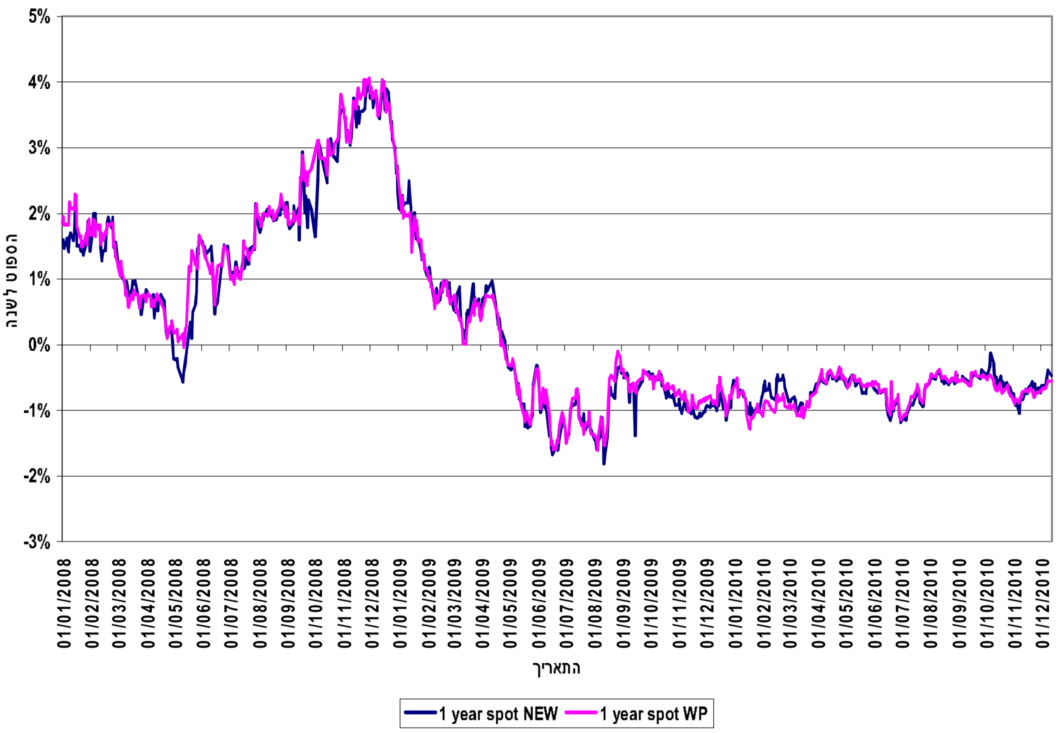
4. תוצאות אמפיריות

בפרק זה נציג את תוצאות האמידה בשיטה שאנו מציעים כאן. במודל עקום האפס המחושב כיום בבנק ישראל הוכנסו שינויים רבים מאז הפרסום של WP, ולכן לא נשווה את התוצאות למודל המקורי, אלא לגרסה מאוחרת יותר, הנמצאת במאגרי המידע של בנק ישראל. בנספח 3 מפורטים ההבדלים העיקריים בין הגרסה המאוחרת של המודל, שהיא המשמשת בבנק, לבין הגרסה המתוארת במאמרם של Wiener & Pompushko (2006). התוצאות שנציג מתייחסות לעקום הריאלי, ואת תוצאות העקום הנומינלי ניתן לקבל מהמחברים..

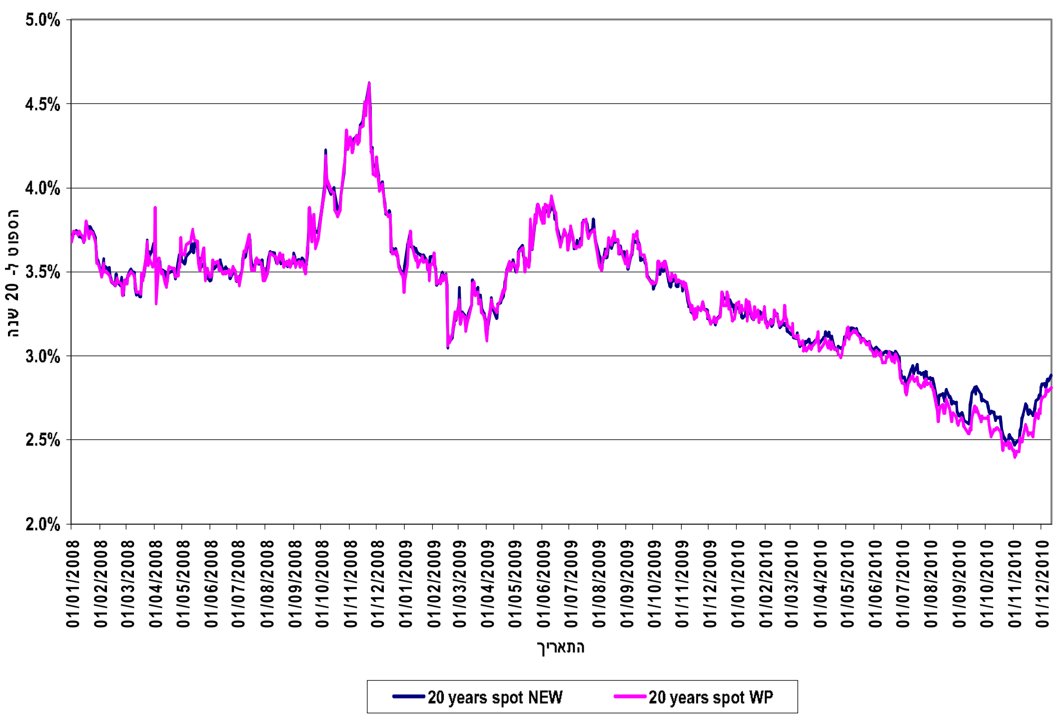
מהתוצאות שיוצגו להלן עולה כי התשואות המתקבלות בשני המודלים דומות למדי והמעבר לשימוש במודל החדש לא יתבטא בקפיצה בסדרות ההיסטוריות. עוד עולה מהתוצאות כי המודל החדש מביא לבניית עקום תשואות חלק וסביר מבחינה כלכלית, וכי הסטייה של המחירים הסינתטיים המחושבים על-ידי המודל ביחס למחירים בפועל קטנה.

באיורים 1 ו-2 ניתן לראות כי התשואות שחושבו לגבי תקופת המדגם (ינואר 2008 עד דצמבר 2010) במודל החדש (מטלאב) ובמודל של WP בגרסתו המאוחרת (סאס) דומות בטווחים שונים:

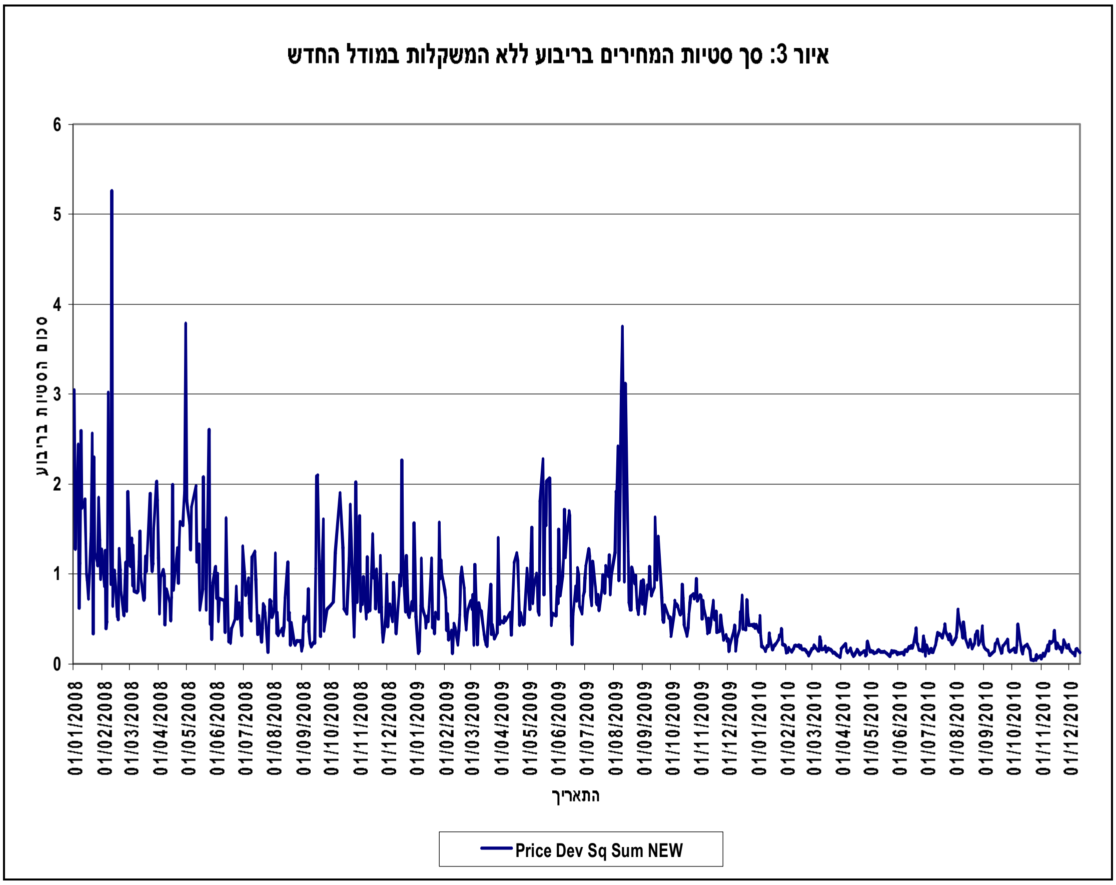
איור 1: השוואת תשואות הספוט הריאליות לשנה בין WP למודל החדש



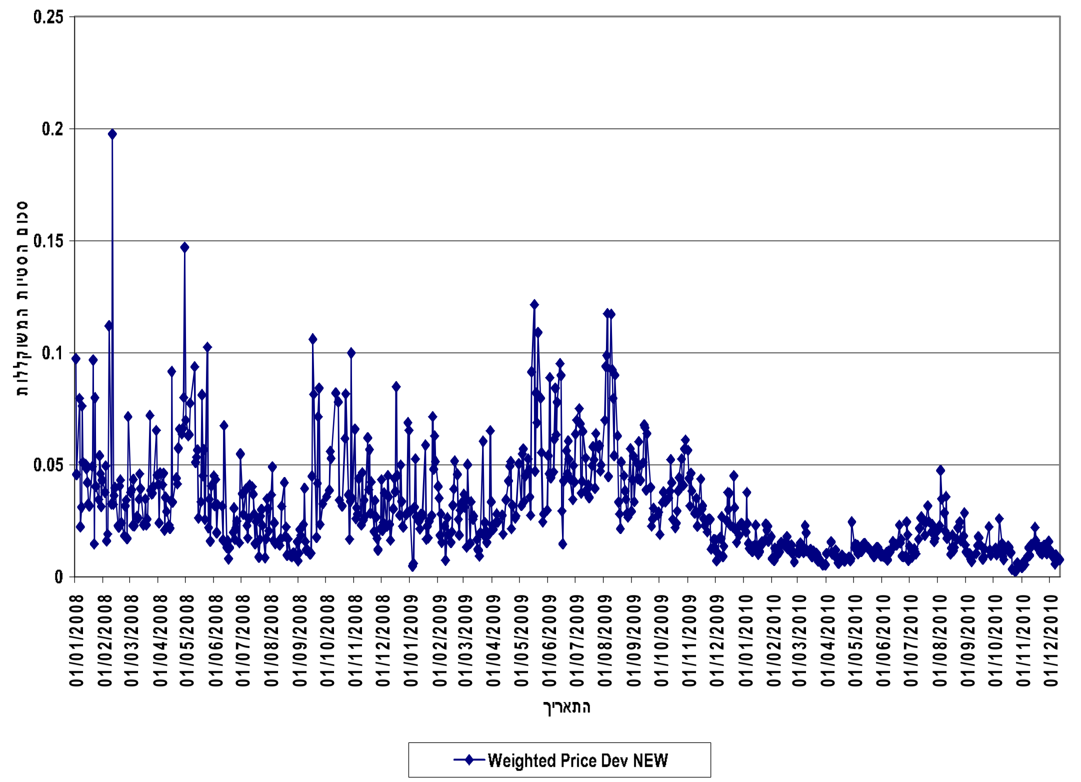
איור 2: השוואת תשואות הספוט הריאליות ל-20 שנה בין WP למודל החדש



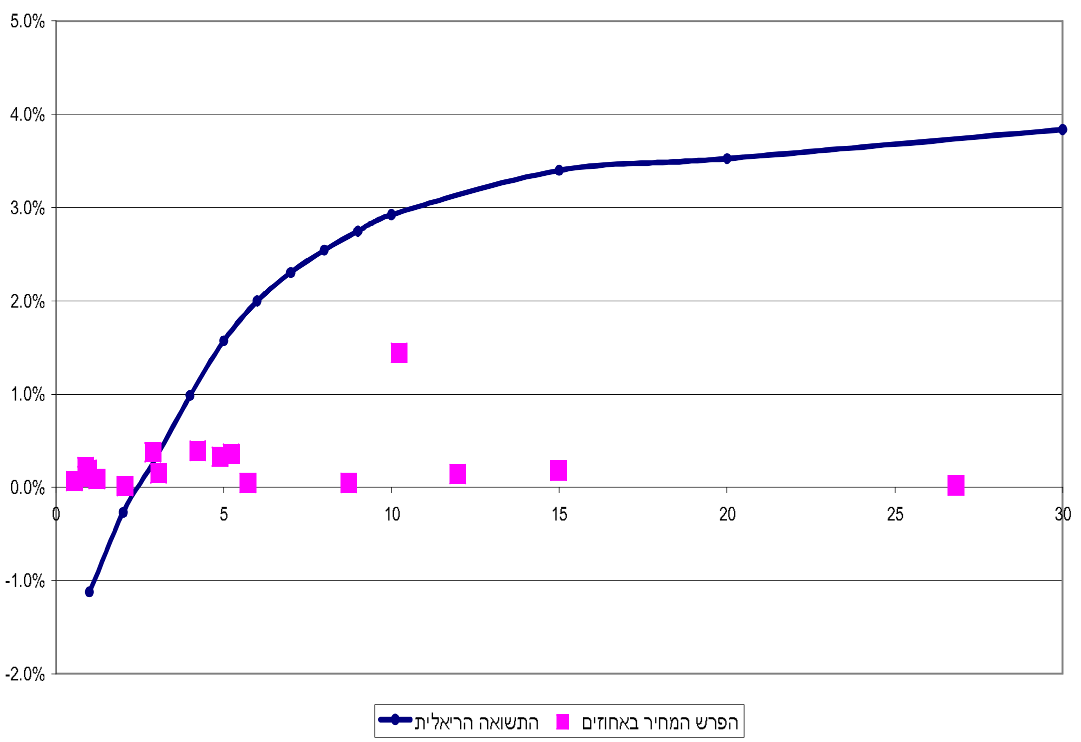
באיורים 3 ו-4 ניתן לראות כי סך ריבועי הסטיות היומיות בין מחירי האיגרות בפועל למחירי האיגרות המחושבים על ידי המודל נמוך למדי, וכי סך הסטיות היומיות המשוקללות, לפי המשקלות שנקבעו כמתואר במסמך זה, הוא נמוך מאוד. ניתן לראות שגם בתאריכים שבהם נרשמו סטיות גבוהות יחסית של המחירים במודל מן המחירים בפועל סך הסטיות המשוקללות היה קטן מ-0.1.(משמע שסדרת הסטיות המשוקללות יציבה הרבה יותר מסך הסטיות ללא משקלות.) איור 5 מציג דוגמה של העקום הריאלי מ-10/08/2009, מועד שבו הקנס ללא משקלות היה גבוה יחסית (3.75), לצד סטיות המחירים באחוזים של האיגרות שהשתתפו באמידה, מסודרות לפי הטווח לפדיון. ניתן לראות כי באותו יום הסטיות של המחירים באחוזים נמוכות למדי. הגדולה שבהן היא באיגרת הריאלית לעשר שנים, שבה מחזור המסחר באותו יום היה נמוך. ניתן לראות כי באיגרות שהטווח לפדיונן סמוך לשלה אין סטייה משמעותית במחיר, ומכאן שהעקום מתאר באופן מדויק למדי את התשואה לפדיון של איגרות אלו בעוד שהמחיר של האיגרת לעשר שנים סוטה מהמגמה הכללית.



איור 4: סך סטיות המחירים המשוקללות בריבוע במודל החדש



איור 5: תשואות עקום האפס הריאלי ב-10.08.2009 וסטיות המחירים באחוזים

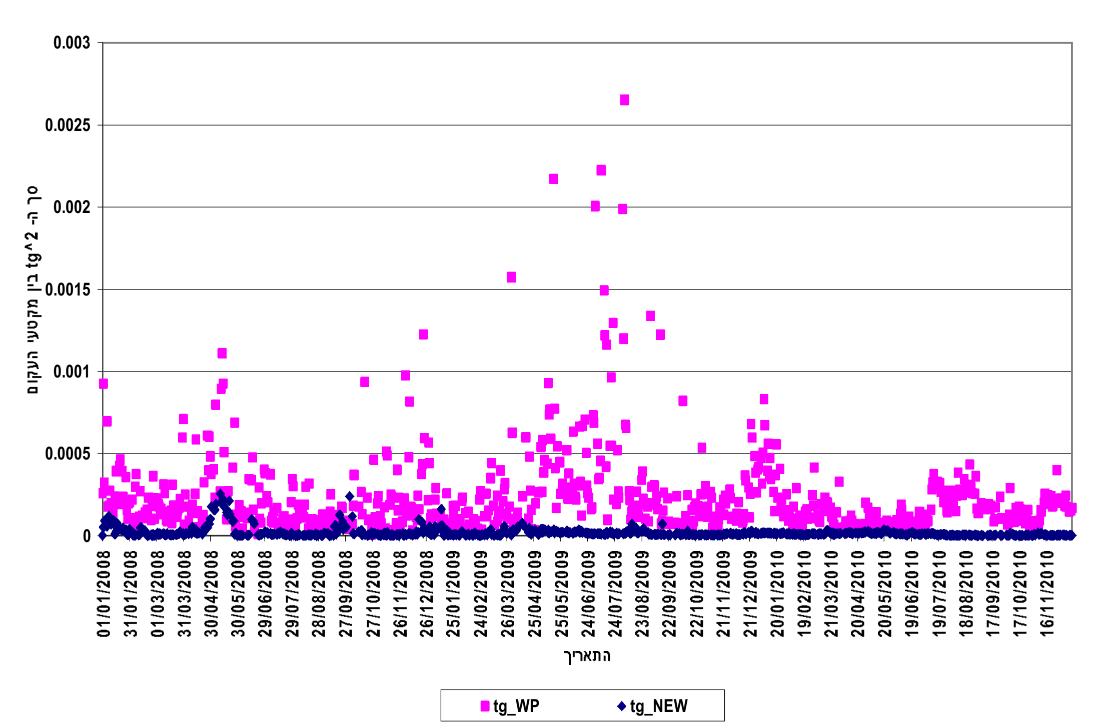


לבסוף, באיור 6 להלן מוצג הקנס היומי על חוסר החלקה לטווחים של שנה ומעלה. אנחנו מציגים את הקנס לטווחים של מעל שנה משום שבטווחים קצרים יותר העקום תנודתי מאוד, ומשום שהבנק מפרסם רק תשואות לטווחים של מעל שנה. בטווחים שמתחת לשנה ריביות הפורוורד המחושבות במודל המוצע כאן נוטות להיות תנודתיות, ובפרט – תנודתיות יותר מהריביות המחושבות במודל של WP; וזאת עקב המשקל הנמוך שפונקציית הקנס במודל החדש מייחסת למידת ההחלקה של העקום בטווחים הקצרים. עם זאת הדבר לא מוביל להבדלים משמעותיים בחישוב הספוטים, ובפרט הספוט לשנה, כפי שניתן לראות באיור 1 לעיל.

הקנס על חוסר החלקה המוצג באיור 6 מחושב לפי השיטה של WP, כלומר סך השינוי בריבוע בשיפוע של עקום הפורוורד בין כל שני מקטעים לאורך העקום (או, במילים אחרות – ההפרש בריבוע בין ה- tg של הזוויות הנוצרות בין כל שלושה פורוורדים סמוכים על העקום). חשוב לזכור שהאופטימיזציה במודל של WP מנסה למזער קנס זה, ואילו במודל המוצע במסמך זה האופטימיזציה מנסה להביא למינימום את הנגזרת השנייה של עקום הפורוורד.

כתוצאה מההבדלים בפונקציית הקנס על חוסר ההחלקה קשה להשוות בין הקנסות על חוסר ההחלקה בשני המודלים: מחד גיסא, במודל החדש ניתן משקל גבוה יותר לקנס על חוסר ההחלקה בטווחים הבינוניים-ארוכים, דבר המקטין את הקנס של המודל החדש באיור 6 ביחס למודל של WP, ומאידך – פונקציית הקנס במודל החדש אינה מתבססת על ההפרש בריבוע של ה-tg, אלא על הנגזרת השנייה של העקום, דבר המגדיל, בהגדרה, את התוצאה המתקבלת עבור המודל החדש באיור 6 ביחס למודל של WP. עם זאת ניתן לראות באיור 6 שהעקום המתקבל במודל המוצע כאן הוא חלק יחסית בטווחים הרלוונטיים עבורנו:

איור 6: השוואת ה- tg^2 היומי לטווחים של מעל שנה בין המודל החדש ל WP



5. סיכום

עקום תשואות האפס המבוסס על אג״ח ממשלתיות הוא רכיב מרכזי בניתוח כלכלי ופיננסי. חישוב העקום מאפשר לנו לתמחר זרמי תשלומים ולגזור מידע לגבי ציפיות השוק בנוגע למשתנים מקרו-כלכליים מרכזיים. בנק ישראל עוקב אחר ההתפתחויות בעקומי התשואות הנומינליים והריאליים המהווים תשומה מרכזית לדיונים המוניטריים ולהחלטת הריבית.

ישנן מספר שיטות המשמשות לחישוב עקום התשואות, ובולטת בעיקר החלוקה למודלים פרמטריים (נלסון-סיגל והפיתוח שלו נלסון-סיגל-סוונסון) ולמודלים א-פרמטריים. בבנק ישראל מחשבים את העקום כיום באמצעות מודל א-פרמטרי שפיתחו צבי וינר והלנה פומפושקו: Wiener & Pompushko (2006) (WP).

במסגרת העבודה הנוכחית הצענו מספר שיפורים למודל של WP, וזאת תוך הסתמכות על הספרות המחקרית בנושא ועל הניסיון שנצבר בשימוש במודל בבנק ישראל, תוך התאמתו לתנאי השוק הישראלי – המוכרים (מחסור בעומק, איגרות ריאליות) והחדשים (צמצום הסדרות המונפקות על ידי הממשלה בשנים האחרונות, הן הריאליות והן הנומינליות). הצגנו כאן שישה שיפורים מרכזיים במודל:

- שנתות דינמיות בגריד המשמש לאמידה במקום שימוש בגריד קבוע.
- פולינומים מדרגה שלישית במקום מדרגה ראשונה לבניית ה-spline.
- פונקציית קנס בגין חוסר החלקה המתבססת על הנגזרת השנייה של עקום הפורוורד במקום על השינויים ב-tg של העקום בנקודות שונות לאורכו.
- משקולת הקנס על חוסר ההחלקה התלויה בטווח לפדיון (variable roughness penalty) במקום משקולת קבועה לאורך העקום.
- הקנס על הסטייה מהמחירים משוקלל לא רק במחזור של כל איגרת, אלא גם בהופכי של ה-מח״ם שלה + 1.
- זיהוי איגרות חריגות המתבסס על השינוי במחיר בפועל ביחס לתחזית השינוי הנגזרת מה-מח״ם של האיגרת, או על השפעה חריגה של האיגרת על אמידת העקום, במקום על קריטריון סטטיסטי בלבד של שינוי חריג במחיר ביחס ליום הקודם. במקרה שמזוהה שינוי חריג במחיר האיגרת על פי הקריטריון הראשון לעיל, לא משמיטים את האיגרת החריגה מהאמידה (במידת האפשר), אלא מתקנים את המחיר שלה, באמצעות ניפוי העסקה החריגה שהובילה להטיה במחיר, ומשתמשים במחיר המתוקן לצורך אמידת העקום.

מבדיקה אמפירית שערכנו עולה כי המודל החדש מוביל לעקום חלק וסביר מבחינה כלכלית. בכלליות, התשואות המתקבלות במודל החדש דומות לתשואות המחושבות כיום בבנק ישראל, שהן על בסיס מודל משודרג של Wiener & Pompushko (2006).

השינויים שאנחנו מציעים בעבודה זו מאפשרים לנו לאמוד את עקום התשואות חסר הסיכון ביתר דיוק, תוך השגת עקום חלק ויציב יחסית. יחד עם זאת, שאלות רבות וחשובות עדיין לא זכו להתייחסות מלאה במסגרת עבודה זו. להלן כמה מן הרעיונות והאפשרויות הדורשים לדעתנו מחקר נוסף, ובעיקר בחינות אמפיריות מקיפות יותר:

- הכמות והמיקום האופטימליים של השנתות על הגריד.

- חשוב לחפש דרכים לשכלל ולשפר את הקריטריונים לניפוי איגרות חריגות, או, לחלופין, לנסות ו"לנקות" את המחיר הקיים בשוק מהשפעות של הטיות. במסגרת זו ניתן לבחון את האפשרות להשתמש במחירים יומיים ממוצעים, בממוצע בין מחירי ה-bid-ask בנקודה מסוימת, או בממוצע פשוט של כל העסקאות שהתבצעו במהלך יום המסחר למעט עסקאות חריגות.
- השתמשנו במשקלות שהציע Waggoner (1997) לקנס על חוסר ההחלקה. ניתן לחפש משקלות שיתאימו יותר לנתוני המשק הישראלי, ו/או לבחון שימוש בשיטה אחרת לקביעת המשקלות, למשל GCV.

ביבליוגרפיה

גמרסני, י׳ (2011). ״השפעת רפורמת עושי השוק ב-2006 על רמת הנזילות בשוק אגרות החוב הממשלתיות השקליות״, לקראת פרסום במסגרת סדרת מאמרים לדיון של בנק ישראל.

Anderson, N. and J. Sleath (2001). "New estimates of the UK real and nominal yield curves", Bank of England working paper, ISSN 1368-5562

Bank of International Settlements (2005). "Zero-Coupon Yield Curves: Technical Documentation", Monetary and Economic Department, October.

Bolder, D. & D. Streliski (1999). "Yield curve modeling at the Bank of Canada, Technical report", Bank of Canada

Fisher, M., D. Nychka and D. Zervos (1995). "Fitting the term structure of Interest Rates with Smoothing Splines", Federal Reserve Board, Finance and Economics Discussion Series 95-1

McCulloch, J. H. (1971). "Measuring the term structure of interest rates", Journal of Business. 44, 19-31.

Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). "Parsimonious modeling of yield curves", Journal of Business 60, 473-489

Subramanian, K.V. (2001). "Term Structure Estimation in Illiquid Markets", The Journal of Fixed Income11, 77-86

Svensson, L. (1994). "Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-4", NBER working paper series, 4871.

Svensson, L. (1995). "Estimating forward interest rates with the extended nelson and siegel method', Sveriges Riksbank Quarterly Review 3, 13-26.

Thomas, S. and V. Sample (2000). "Estimating the Term Structure of Interest Rates in India" Working paper, Indira Gandhi Institute of Development Research.

Waggoner, D. (1997). "Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices", Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper Series 97-10.

Wiener, Z., and H. Pompushko (2006). "The estimation of nominal and real yield curves from government bonds in Israel", The Journal of Risk Finance 7, 488-502.

נספח 1 – הקשר המתמטי בין עקום האפס למחירי האג"ח

תהי $\delta(t)$ פונקציית ההיוון (discount function); משמע ש-$\delta(t)$ הוא המחיר היום של 1 ש"ח חסר סיכון שיתקבל בזמן t. תהי $s(t)$ ריבית ה-spot של עקום האפס לזמן t (במונחים שנתיים), ו-$f(t)$ תהיה פונקציית ריביות הפורוורד.

אזי מתקיים הקשר הבא:

$$\delta(t) = \exp(-t \cdot s(t)) = \exp\left(-\int_0^t f(r)dr\right)$$

המחיר של אג"ח חסרת סיכון המשלמת קופונים c_i (בתשלום האחרון כלול הקופון והקרן) בעולם ללא ארביטראז' יהיה:

$$P = \sum_{i=1}^{K} c_i \delta(t_i) = \sum_{i=1}^{K} c_i \exp(-t \cdot s(t_i)) = \sum_{i=1}^{K} c_i \exp\left(\int_0^{t_i} - f(r)dr\right)$$

נספח 2 – שימוש בנתונים התוך-יומיים לתיקון תצפיות חריגות

כידוע, העקום נבנה על סמך מחירי הנעילה של הסדרות השונות בסוף יום המסחר. כפי שיוסבר להלן, מחירי הנעילה מבוססים לרוב על העסקאות שבוצעו לקראת סוף יום המסחר. כתוצאה מכך, עסקאות המבוצעות לקראת סוף יום המסחר, שמחיריהן חריגים ביחס לשאר העסקאות שבוצעו במהלך היום, עלולות להשפיע על תוואי העקום. הדבר נכון במיוחד ככל שמספר הסדרות בכל יום הולך וקטן.

כדי להבהיר את העניין נסביר בקצרה כיצד מחושב מחיר הנעילה:

מחיר הנעילה (להלן: שער הנעילה) מחושב מייד לאחר שלב מסחר הנעילה.[14] אם המחזור בשלב מסחר הנעילה היה גבוה דיו (באג"ח המחזור המינימלי עומד על 400 אלף ש"ח) נקבע שער נעילה הזהה לשער מסחר הנעילה. אם התנאי האמור לגבי המחזור אינו מתקיים מחושב שער הנעילה כממוצע משוקלל של שער מסחר הנעילה ושל המחירים בעסקאות במהלך עשר הדקות האחרונות של שלב המסחר הרציף. אם מחזור המסחר הכולל בכל העסקאות האלה, לרבות שלב מסחר הנעילה, היה עדיין נמוך מ-400 אלף ש"ח, מחושב שער הנעילה כממוצע משוקלל של שער מסחר הנעילה ושל השערים בעסקאות האחרונות של שלב המסחר הרציף, והעסקה המוקדמת ביותר שתיכלל, בשלב הרציף, היא זו שצירופה למחזור העסקאות יביא את המחזור לעבור את רף ה-400 אלף ש"ח. שער מסחר הנעילה מבוסס על כל הפקודות שהוגשו עד תחילת מסחר הנעילה וטרם בוצעו, והוא נקבע כשער שבו נחתכות עקומות ההיצע והביקוש המצטברים, ובו מושג המחזור הגדול ביותר. כללים נוספים לגבי אופן קביעת השער ומחזור מסחר הנעילה מצויים במדריך המסחר בבורסה, הנחיות על פי החלק השלישי לתקנון, פרק ג.

כאמור, כאשר אנו נתקלים במחיר חריג של איגרת חוב ביחס לתחזית אנו בודקים אם הדבר נובע מעסקה (או רצף עסקאות) ספציפית, ואם כן – משמיטים את אותה עסקה (או רצף עסקאות). בדיקה זו מתבצעת באופן הבא: תחילה אנו מחשבים את ממוצע המחירים של כל העסקאות באותו יום ואת סטיית התקן שלהם; עסקה שמחירה סוטה ביותר משלוש סטיות תקן מהממוצע מוגדרת כעסקה חריגה. עסקה חריגה שעלולה להשפיע על מחיר הנעילה יכולה להיות העסקה המצרפית שהתבצעה בשער הנעילה, או אחת העסקאות שנעשו לקראת סוף המסחר הרציף והשפיעו על מחיר הנעילה בגלל התנאי בדבר מחזור מינימלי. לאחר השמטת העסקה החריגה יש לחשב מחדש את מחיר הנעילה ואת מחזור המסחר הכולל לאותו יום. לשם חישוב מחיר הנעילה החדש אנו משתמשים באותם הכללים המוגדרים בבורסה לחישוב מחיר זה, ושפורטו לעיל. את המחזור (היומי) החדש אנו מקבלים על ידי הפחתת העסקה שהושמטה מהמחזור היומי המקורי.

לדוגמה: ביום 21 ביוני 2010 נצפה באחת הסדרות שער נעילה נמוך במיוחד, שהוסבר בשער מסחר הנעילה נמוך במידה משמעותית מן השערים שבהם בוצעו עסקאות באותו היום (כתוצאה מפקודות בשערים נמוכים). כדי לתקן את שער הנעילה החריג השמטנו מהחישוב את העסקה המצרפית שבוצעה בשלב מסחר הנעילה, וחישבנו את שער הנעילה בהסתמך על שקלול העסקאות

[14] יום המסחר מורכב מכמה שלבים: שלב טרום פתיחה, שלב מסחר הפתיחה, שלב המסחר הרציף, שלב טרום נעילה ושלב מסחר הנעילה. כיום, תחילת שלב טרום נעילה (סיום המסחר הרציף) הוא בשעה 16:14-16:15, ומכרז נעילה וסיום המסחר הוא רנדומאלי בטווח 16:23-16:28.

שבוצעו בעשר דקות האחרונות של השלב הרציף. תיקון שער הנעילה באופן זה הוביל לאמידת עקום דומה לעקום שנאמד ביום הקודם ולעקום שנאמד ביום המחרת – דומה יותר מאשר העקום שהיה נאמד לולא התיקון, שהתוואי שלו היה סוטה מהותית מתוואי העקום בימים הסמוכים.

נספח 3 – ההבדלים בין מודל 'עקום האפס' המחושב כיום בבנק ישראל לבין המודל המתואר אצל Wiener & Pompushko (2006)

1. הגריד המשמש לאמידה במודל 'עקום האפס' הוא גריד דינמי, בדומה לגריד שאנו מציעים במסגרת עבודה זו.

2. הקנס על הסטייה מהמחירים משוקלל לא רק לפי מחזור המסחר של כל איגרת חוב, אלא גם לפי השקלול הבא: $\exp(-ttm/10)$

כאשר: השנים עד מועד הפדיון של האיגרת = ttm

משקל זה דומה למשקל המח"ם שאנחנו מציעים בעבודה זו, אבל השימוש הוא לא במח"ם אלא בתקופה לפדיון ובמקום ההופכי נעשה שימוש באקספוננט בחזקת הזמן לפדיון חלקי עשר במינוס.

3. איגרות חוב חריגות מושמטות באמצעות כלי proc-model של תוכנת סאס, באופן שונה במקצת מזה המתואר במאמר. מאחר שזה אינו עניינו העיקרי של מאמר זה לא ניכנס לשיטת הניפוי.