

**אמידה ואומדני הבזק (Nowcasting) של התוצר
החודשי בישראל: השוואה בין מודלים סטטיסטיים¹**

אריאל מנצורה* ורון פלוס**

ניירות תקופתיים 2013.09
נובמבר 2013

¹ בנק ישראל, <http://www.boi.org.il>

* החטיבה למידע ולסטטיסטיקה, אריאל מנצורה – ariel.mansura@boi.org.il, טלפון: 02-6552534
** החטיבה למידע ולסטטיסטיקה, רון פלוס – Ronen.Fluss@boi.org.il, טלפון: 02-6552545

ברצוננו להודות לד"ר קרנית פלוג על הרעיון והיוזמה, לצחי פרנקוביץ', לבנצי שרייבר, ליאיר חיים ולמשתתפי הסמינר המשותף לחטיבות המחקר ומו"ס על הערותיהם המועילות.

הדעות המובעות במאמר זה אינן משקפות בהכרח את עמדת בנק ישראל

אמידה ואומדני הבזק (Nowcasting) של התוצר החודשי בישראל: השוואה בין מודלים סטטיסטיים

אריאל מנצורה ורון פלוס

תמצית

בעבודה זו אנו בוחנים ארבעה מודלים לאמידת התוצר החודשי בישראל באמצעות נתוני התוצר הרבעוני וקבוצה של משתנים מסבירים חודשיים. המודלים הם מסוג של תדירות מעורבת (Mixed Frequency Models), כלומר מאפיינים ישירות את הקשר בין התוצר הרבעוני למשתנים החודשיים ואינם דורשים לסכום קודם את המשתנים החודשיים לכדי משתנים רבעוניים. אחד היתרונות במודלים הללו נעוץ בכך שהם מאלצים את הנתונים הנאמדים של התוצר החודשי להסתכם בנתוני התוצר הרבעוני.

כתוצר נלווה לאמידה זו נציג גם אומדני הבזק (nowcasting) לתוצר החודשי. באומדן הבזק משתמשים כאשר התוצר של הרבעון האחרון טרם התקבל אך הנתונים על המשתנים המסבירים החודשיים כבר התקבלו.

מאחר שהתוצר החודשי הינו משתנה בלתי נצפה, לא ניתן לדעת ישירות איזה מבין המודלים מיטיב לאמוד אותו. לכן בדקנו את המודלים בצורה עקיפה ע"י סכימה רבעונית של אומדני הבזק החודשיים שנאמדים מחוץ למדגם (out of sample) והשוואתם לנתוני התוצר הרבעוניים. מצאנו שמודל 1 (Mariano and Murasawa, 2010) עדיף על שאר המודלים, לרבות מודל הייחוס (Benchmark Model).

Estimation and Nowcasting of Monthly GDP in Israel: A Comparison of Statistical Models¹

Ariel Mansura and Ronen Fluss

Abstract

In this paper, we assess four models for estimating monthly GDP in Israel using quarterly GDP data and a group of monthly explanatory variables. The models are mixed frequency models that directly characterize the connection between quarterly GDP and the monthly variables and do not require the prior totaling of the monthly variables into quarterly variables. One of the advantages of these models is that they force the estimated monthly GDP data to total the quarterly GDP data.

As a byproduct of this estimation, we also present nowcasting estimates of monthly GDP. The nowcasting estimates are used when the GDP of the latest quarter has not yet been obtained, but the data on the monthly explanatory variables has already been obtained.

Since monthly GDP is an unobserved variable, we cannot directly know which of the models is best for estimating it. We therefore examined the models indirectly through a quarterly aggregation of out-of-sample monthly nowcasting estimates and comparing them to the quarterly GDP data. We found that Model 1 (Mariano and Murasawa, 2010) is preferable to the other models, including the Benchmark Model.

¹ We would like to thank Dr. Karnit Flug for the idea and the initiative. We would also like to thank Tsahi Frankovits, Ben Z. Schreiber, Yair Haim, and the participants of the joint seminar of the Research Department and the Information and Statistics Department for their helpful comments.

1. הקדמה ומוטיבציה

קובעי המדיניות המוניטרית מקיימים דיונים חודשיים שבמהלכם הם נדרשים להעריך את מצב הכלכלה בהווה ובעתיד הקרוב כדי לנהל את המדיניות בצורה יעילה. אך קיים קושי להעריך את מצב הכלכלה מדי חודש ובזמן אמת משום שהמידע הנחוץ חסר. סדרות כלכליות חשובות, המשקפות את הפעילות הכלכלית המצרפית או חלקים עיקריים ממנה, מתקבלות כיום בישראל בתדירות רבעונית בלבד ובאיחור משמעותי. לשם המחשה, נתוני התמ"ג – האינדיקטור החשוב והמקובל ביותר לפעילות המצרפית – מתקבלים בתדירות רבעונית בלבד ובאיחור של כ-6 שבועות מסוף הרבעון.

אחת השיטות להתגבר על הבעיה כרוכה בשימוש באינדיקטורים חודשיים כבסדרות פרוקסי לסדרת התוצר. דוגמה לאינדיקטור כזה משמש מדד הייצור התעשייתי. ואולם שעה שנקודות המפנה בסדרה זו בדרך כלל קרובות לנקודות המפנה בסדרת התוצר, לעיתים הן אינן חופפות להן ואף סותרות אותן (ראו: מנצורה ושרייבר 2012; גרא 2012). נוסף על כך זהו מדד תנודתי, והסדרה אינה כוללת את ענף השירותים אף על פי שבשנים האחרונות הוא מהווה נתח הולך וגדל בסך ענפי התוצר. שיטה אחרת להתגבר על הבעיה כרוכה באמידת הגורם המשותף (common factor) לקבוצה של משתנים חודשיים המשקפים חלקים שונים של הפעילות המצרפית ואשר מושפעים בדרך כזו או אחרת ממחזור העסקים. דוגמה לכך משמש המדד המשולב למצב המשק¹ (מרום, מנשה וסוחוי, 2003). במסגרת מדד זה אומדים גורם משותף יחיד לקבוצה של סדרות כלכליות חודשיות; גורם זה מתאפיין בתהליך אוטו-רגרסיבי עם פרמטרים בעלי השתנות מרקובית (ראו: Kim and Nelson 1999), והוא נבנה כך שהמגמה ארוכת הטווח שלו מתואמת² עם זו של התוצר העסקי. היתרון במודלים הללו נעוץ בכך שהם כוללים צדדים שונים ומגוונים של הפעילות הכלכלית, אך יש להם גם חיסרון: הם מניבים סדרה מוחלקת של אומדנים שאינם מסתכמים בתוצר הרבעוני במשך הרבעון ומשכך הם נטולי משמעות כלכלית ברורה במונחים של תוצר חודשי. כמו כן, ההנחה שלסדרות הללו יש גורם משותף אחד ויחיד היא הנחה מאלצת מדי והיא אף אינה מקבלת בהכרח אישוש אמפירי. יחד עם זאת, אינדיקטורים מעין אלו משמשים כאומדנים חלופיים למחזור העסקים או למצב המשק.

¹ בנספח מופיעה השוואה בין תוצאות האמידה לבין המדד המשולב למצב המשק.
² עד כמה שניתן במסגרת אילוצי המודל. בפברואר 2013 ערכו שינוי מתודולוגי בבניית המדד המשולב, וכעת הנתונים הרבעוניים של התוצר העסקי נכללים בתוך המודל מצב-מרחב (state-space) באופן שהמדד המשולב הנאמד יסתכם בקירוב בתוצר העסקי.

תוצר חודשי, במידה שהוא קיים, מייתר את הצורך להשתמש בסדרות בעייתיות כדוגמת מדד הייצור התעשייתי כדי לקבוע כרונולוגיה של נקודות מפנה במחזור העסקים. דברים ברוח זו מופיעים גם בדף הבית של ה-NBER³:

"The committee views real GDP as the single best measure of aggregate economic activity.... The traditional role of the committee is to maintain a monthly chronology, however, and the BEA's real GDP estimates are only available quarterly. For this reason, the committee refers to a variety of monthly indicators to determine the month peaks and troughs."

לכן יש טעם לגבש אינדיקטורים לתוצר החודשי. בהתאם לכך עבודה זו עוסקת באמידה ישירה של התוצר החודשי, על יסוד משתנים מסבירים, החל משנת 1996⁴. סדרת אומדני התוצר החודשי תוכל לשמש חוקרים שמנתחים את מחזורי העסקים בישראל בתדירות חודשית ובמשך תקופה ארוכה. אמידה זו מניבה תוצר לוואי – אומדן הבזק לתוצר החודשי. באומדן הבזק משתמשים כאשר הנתון של הרבעון האחרון טרם התקבל אך הנתונים על המשתנים המסבירים החודשיים כבר התקבלו. ברור כי בנקודת זמן זו, כלומר כאשר הנתון הרבעוני טרם התקבל, לא ניתן לאלץ את האומדנים להסתכם בנתון הרבעוני המתאים.

בגוף העבודה נבדוק ארבעה מודלים לאמידה ישירה של התוצר החודשי בעזרת משתנים מסבירים חודשיים והתוצר הרבעוני⁵. אלה מודלים מסוג של תדירות מעורבת (Mixed Frequency Models): הם מאפיינים ישירות את הקשר בין התוצר הרבעוני למשתנים החודשיים ואינם דורשים לסכום קודם את המשתנים המסבירים החודשיים לכדי משתנים רבעוניים. היתרון במודלים הללו נעוץ בכך שהם מאלצים את אומדני התוצר החודשי (משתנה מוסבר) הנאמדים להסתכם בנתוני התוצר הרבעוני.

מאחר שהתוצר החודשי הינו משתנה בלתי נצפה, לא ניתן לדעת ישירות איזה מבין המודלים מיטיב לאמוד אותו. לכן בדקנו זאת בצורה עקיפה ע"י סכימה של אומדני התוצר החודשי מחוץ למדגם והשוואתם לנתוני התוצר הרבעוני הנצפים. כדי לבחון את ביצועי המודלים בחיזוי מחוץ למדגם השווינו את ביצועי המודלים האלו למודל ייחוס (Benchmark Model) – היינו רגרסיה ליניארית פשוטה של התוצר על המשתנים המסבירים בתדירות רבעונית.

³ National Bureau of Economic Research, הלשכה הלאומית האמריקאית למחקר כלכלי.

⁴ זאת מפני שנתוני התוצר הרבעוני עד 1995 מתאפיינים באמינות נמוכה.

⁵ נתוני התוצר הרבעוני בעבודה זו נוצרו לפי SNA1993 ולא לפי SNA2008.

שאר המאמר מאורגן כדלקמן. סעיף 2 עוסק בסקירה כללית של מודלים לאמידת התוצר החודשי. סעיף 3 מציג תיאור תיאורטי של המודלים שיישמנו. סעיף 4 מתאר את הנתונים ואת שיטת ההשוואה בין המודלים. סעיף 5 משווה את תוצאות האמידה של המודלים השונים ומציג מבחנים לטיב החיזוי מחוץ למדגם. סעיף 6 מציג בדיקות רגישות וסעיף 7 מסכם.

2. סקירה כללית של מודלים מקובלים לאמידת התוצר חודשי

כאשר אומדים את התוצר החודשי מתוך סדרת נתוני התוצר הרבעוני ומשתנים מסבירים חודשיים, אך טבעי להשתמש בין היתר במודלים של מצב-מרחב (State Space Models), משום שמודלים אלה מקשרים משתנים נצפים עם משתנים בלתי נצפים, ובמקרה שלנו – את התוצר הרבעוני עם התוצר החודשי, בהתאמה.

מודלים של מצב-מרחב בנויים ממערכת של שתי משוואות. המשוואה הראשונה, משוואת המצב (state equation), מתארת את הדינמיקה של וקטור המצב (s_t) , המכיל את המשתנים הבלתי נצפים שרוצים לאמוד. המשוואה השנייה במערכת, משוואת המדידה (observation equation), מקשרת בין וקטור המשתנים הנצפים (y_t) לווקטור המצב. לשתי המשוואות הללו ניתן להוסיף וקטורים של משתנים מסבירים (x_t, z_t) . להלן מופיעה הצגה פורמלית של מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= F_t s_t + C_t z_t + u_{t+1} \\ y_t &= A_t x_t + H_t s_t + v_t \end{aligned} \quad t = 1, \dots, T$$

כאשר $u_t \sim N(0, Q)$, $v_t \sim N(0, G)$ הן השאריות ו- F_t, C_t, A_t, H_t, Q, G הן מטריצות שנאמדו, במידה שהן אינן ידועות, בשיטת הנראות המרבית (maximum likelihood).

מקובל לאמוד את וקטור המצב באמצעות מסנן קלמן (Kalman Filter, KF; Kalman, 1960). שיטה זו מבוססת על אלגוריתם רקורסיבי ובו שני שלבים עיקריים: ניבוי (צעד אחד קדימה) ועדכון. בשלב הניבוי נקבל אומדן של וקטור המצב בזמן t על סמך נתוני העבר (עד זמן $t-1$), ובשלב העדכון נשפר את האומדן בעזרת הנתונים שמתקבלים בזמן t . כדי לאמוד את וקטור המצב בזמן t על יסוד סדרת הנתונים כולה (עד זמן t), נשתמש בהחלקה (smoothing) הואיל והדבר משפר את האומדנים המתקבלים על יסוד כל הנתונים (העתידיים), כולל אלו שמתקבלים אחרי זמן t . כדי לקבל אמידה היסטורית של התוצר החודשי כדאי להשתמש בהחלקה שכן לצורך זה ניתן להשתמש בכל הנתונים הקיימים, אך כדי לקבל אומדני הבזק וניבוי מחוץ למדגם ניתן להשתמש רק בניבוי. יישומים שונים

של גישה זו ניתן לראות בין השאר בעבודות של Liu and Hall ,Mariano and Murasawa (2010) ,Stock and Watson (2010) ו-Cuche and Hess (2000) , (2001).

גישה נוספת ניתן למצוא אצל Schumacher and Breitung (2006). חוקרים אלה משתמשים במודל פקטורי (Factor Model), משום שמודל זה מאפשר להשתמש בקבוצה גדולה של משתנים מסבירים, אך במספר סביר של מקדמים, על ידי צמצום הממד. הפקטורים נאמדים לפי עבודתם של Stock and Watson (2002), תוך שימוש ברכיבים הראשיים (principal components) של הסדרות. יתרונם של מודלים אלו נעוץ ביכולת למצות את האינפורמציה הגלומה בסדרות רבות ולבטא אותה בעזרת מספר סדרות קטן יותר. אולם התהליך דורש זהירות משום שכאשר כוללים במודל הרבה סדרות בלתי רלוונטיות, למעשה מכניסים לתוכו רעש מיותר.

לבסוף נזכיר את הגישה הוותיקה של Chow and Lin (1971). גישה זו מניחה כי קיים קשר ליניארי בין התוצר למשתנים המסבירים בתדירות הרבעונית, וכי קיים קשר זהה בין הסדרות גם בתדירות החודשית. זוהי גישה פשוטה יחסית שכן קל לאמוד את הקשר ברמה הרבעונית. אולם מאידך גיסא זוהי גישה מוגבלת שכן אומדים את הפרמטרים של המודל רק על יסוד האינפורמציה הגלומה במשתנים המסבירים בתדירות רבעונית, שעה שבגישות הנ"ל אומדים את הפרמטרים גם על יסוד האינפורמציה הגלומה במשתנים המסבירים החודשיים.

3. תיאור המודלים

בשלב ראשון נתאר את הקשר בין התוצר החודשי, שהינו משתנה בלתי נצפה, לבין התוצר הרבעוני, שבו נראה משתנה סיכום של 3 חודשים אשר נצפה בחודש האחרון של כל רבעון. נגדיר את $\{x_{t,q}^* \mid t = 3,6,9,\dots,T\}$ כסדרת התוצר הרבעוני ואת $\{x_{t,m}^* \mid t = 1,2,3,\dots,T\}$ כסדרת התוצר החודשי הבלתי נצפית, כך שעבור $t = 3,6,9,\dots$

$$\ln x_{t,q} = \frac{1}{3} (\ln x_{t,m}^* + \ln x_{t-1,m}^* + \ln x_{t-2,m}^*) \quad (1)$$

לפי משוואה זו התוצר הרבעוני הוא ממוצע גיאומטרי של התוצר החודשי⁶. למרות שמבחינה חשבונאית נכון יותר להציג את התוצר הרבעוני כממוצע פשוט של התוצר החודשי, התוצר החודשי המתקבל מזהות זו מהווה קירוב לזה המבוקש.

⁶ התוצר החודשי המוצג בזהות זו נתון במונחים רבעוניים.

מכיוון שהתוצר הרבעוני הוא מסדר אינטגרציה $I(1)$,⁷ נכתוב את זהות (1) במונחים של שיעורי

שינוי רבעוניים כדלהלן:

$$y_{t,q} = \left(\frac{1}{3}\right)(\ln x_{t,m}^* + \ln x_{t-1,m}^* + \ln x_{t-2,m}^*) - \left(\frac{1}{3}\right)(\ln x_{t-3,m}^* + \ln x_{t-4,m}^* + \ln x_{t-5,m}^*) \quad (2)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)(y_{t,m} + 2y_{t-1,m} + 3y_{t-2,m} + 2y_{t-3,m} + y_{t,m-4})$$

$$. y_{t,m} = \ln x_{t,m}^* - \ln x_{t-1,m}^* \quad \text{ו-} \quad y_{t,q} = \ln x_{t,q} - \ln x_{t-3,q} \quad t = 6, 9, \dots, \text{ כאשר}$$

משוואה (2) מתארת למעשה את הקשר בין שיעורי השינוי בתוצר הרבעוני לשיעורי השינוי בתוצר החודשי. ממשוואה (2) ניתן לראות, לדוגמה, ששיעור השינוי ברבעון השני של השנה $(y_{6,q})$ תלוי בחמשת שיעורי השינוי המתייחסים לששת החודשים הראשונים של השנה, היינו ינואר עד יוני $(y_{2,m} - y_{6,m})$.

באותה דרך נגדיר גם וקטור של N משתנים מסבירים חודשיים $\{x_{t,ex} \quad t = 1, 2, 3, \dots, T\}$, וכן את

$$. \{y_{t,ex} = \ln x_{t,ex} - \ln x_{t-1,ex} \quad t = 1, 2, 3, \dots\}$$

בסעיפי המשנה הבאים נתאר ארבעה מודלים. שני הראשונים לקוחים מ- Mariano and

Murasawa, 2010, השלישי לקוח מ- Schumacher and Breitung, 2006 והאחרון לקוח מ- Chow

and Lin, 1971. מעתה והלאה המונחים "תוצר חודשי" ו"תוצר רבעוני" יתייחסו למעשה לשיעורי

השינוי שהגדרנו לעיל, אלא אם נציין אחרת.

3.1. מודל 1 (Mariano 1) – מודל VAR לתדירות מעורבת (Mixed Frequency VAR Model)

נגדיר את $H(L)$ באופן הבא,

$$H(L) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & I_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} L^3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} L^4$$

$$. H(L) = \sum_{i=0}^4 H(i)L^i \quad \text{ו-} \quad L^i x_t = x_{t-i}, \text{ (lag operator) } \text{ כאשר } L \text{ הוא אופרטור הפיגור}$$

כפי שניתן לראות, האיברים השמאליים העליונים במטריצות הללו בונים את משוואה (2). שאר הבלוקים אינם משקפים את הקשר בין משתנים חודשיים ורבעוניים אלא רק שומרים על זהות

⁷ על פי מבחן Dickey Fuller.

המשתנים הנמצאים בשני הצדדים של משוואה (3) להלן. כמו כן נגדיר

$$\mu = E(y_t), \mu^* = E(y_t^*), y_t = \begin{bmatrix} y_{t,q} \\ y_{t,ex} \end{bmatrix}, y_t^* = \begin{bmatrix} y_{t,m} \\ y_{t,ex} \end{bmatrix}$$

בהתחשב בכך,

$$y_t - \mu = H(L)(y_t^* - \mu^*) \quad (3)$$

כאשר $L^i x_t = x_{t-i}$ הינו אופרטור פיגור (lag operator) ו- $\mu^* = \frac{\mu}{3}$.

הרכיב הראשון במשוואה (3) משקף את הקשר בין התוצר הרבעוני לחודשי שמופיע במשוואה (2),

ושאר הרכיבים רק שומרים, כאמור, על זהות המשתנים המסבירים, כלומר $y_{t,ex} \equiv y_{t,ex}$.

נניח שמודל אוטו-רגרסיה $Gaussian VAR(p)$ מאפיין את הדינמיקה של וקטור המשתנים

החודשיים y_t^* באופן הבא:

$$\Phi(L)(y_t^* - \mu^*) = w_t \quad w_t \sim IN(0, \Sigma) \quad (4)$$

כאשר $\Phi(L)y_t^* = \phi_1 y_{t-1}^* + \phi_2 y_{t-2}^* + \dots + \phi_p y_{t-p}^*$ הם מקדמי האוטו-רגרסיה ו- Σ היא מטריצת

השונויות של הרעש (השגיאות). לפי מודל זה, הווקטור הכולל את התוצר החודשי ואת המשתנים

המסבירים מאופיין ע"י מודל $VAR(p)$, כלומר כל משתנה בווקטור זה מוסבר ע"י הפיגורים שלו ושל

המשתנים האחרים.

כדי לאמוד את הפרמטרים של מערכת (4) $(\Phi$ ו- $\Sigma)$ ואת התוצר החודשי, נציג את המשוואות

(3) ו-(4) כמודל מצב-מרחב (State Space). נגדיר את וקטור המצב (s_t) באופן הבא:

$$s_t = \begin{bmatrix} y_t^* - \mu^* \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{t-4}^* - \mu^* \end{bmatrix} \quad (5)$$

ונציג מערכת משוואות מצב-מרחב באופן הבא:

$$s_{t+1} = A s_t + B z_t \quad (6)$$

$$y_t = \mu + C s_t \quad (7)$$

$$\{z_t\} \sim IN(0, I_{N+1}) \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_1 \dots \Phi_p & 0_{(N+1) \times [(5-p)(N+1)]} \\ I_{4 \times (N+1)} & 0_{4 \times (N+1) \times (N+1)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ 0_{4 \times (N+1) \times (N+1)} \end{bmatrix}$$

$$C = [H_0 \dots H_4]$$

את וקטור המצב נאמוד באמצעות מסנן קלמן ואת הפרמטרים – ע"י מקסום ישיר של פונקציית הנראות. ניתן לאמוד את הפרמטרים של המודל גם באמצעות אלגוריתם EM (Expectation Maximization). זהו אלגוריתם דו-שלבי: בשלב הראשון הוא אומד, בעזרת מסנן קלמן, את וקטור המצב בהינתן הפרמטרים, ובשלב השני הוא אומד את הפרמטרים של המודל בהינתן וקטור המצב. הוא ממשיך באופן זה עד להתכנסות האומדים.⁸

3.2. מודל 2 (Mariano 2) – מודל פקטורי בתדירות מעורבת (Mixed Frequency Factor Model)

נניח מודל עם k פקטורים עבור y_t^* , $k < N + 1$, כך שלכל $t = 1, \dots, T$

$$y_t^* = \mu^* + \Lambda f_t + u_t \quad (9)$$

$$\Phi_f(L) f_t = v_t \quad (10)$$

$$\Phi_u(L) u_t = w_t \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} \right\} \sim IN \left(0, \begin{bmatrix} \Sigma_{vv} & 0 \\ 0 & \Sigma_{ww} \end{bmatrix} \right) \quad (12)$$

$\Phi_f(\cdot)$ ו- $\Phi_u(\cdot)$ הם פולינומים מסדר p ו- q , בהתאמה, f_v הוא וקטור הפקטורים מממד k, Λ היא מטריצת המקדמים (loadings) לבניית הפקטורים, ו- Σ_{vv}, Σ_{ww} הן מטריצות אלכסוניות של שוניות הרעש במודלי ה-VAR.

במודל זה הווקטור שכולל את התוצר החודשי ואת המשתנים המסבירים מוסבר ע"י מספר קטן של פקטורים (בלתי נצפים), ולפקטורים הללו – כמו גם לרעשים – מתאימים מודל $VAR(p)$

⁸ בעקבות המאמר של Mariano and Murasawa נשתמש באלגוריתם ה-EM כדי למצוא ערכים התחלתיים לפרמטרים, ועל הפרמטרים ההתחלתיים הללו נפעיל את מסנן קלמן כדי לאמוד את הפרמטרים באופן שמביא למקסימום את פונקציית הנראות.

(משוואות 10 ו-11). מודל זה נבדל מקודמו בכך שהוא מכיל פחות פרמטרים, ודבר זה מאפשר אמידה יותר מדויקת.

נציג את מערכת המשוואות (9)–(12) כמערכת משוואות מצב-מרחב באופן הבא:

$$s_t = \begin{bmatrix} f_t \\ \vdots \\ f_{t-4} \\ u_t \\ \vdots \\ u_{t-4} \end{bmatrix}$$

$$s_{t+1} = A s_t + B z_t \quad (13)$$

$$y_{t,q} = \mu + C s_t \quad (14)$$

$$z_t \sim IN(0, I_{k+N+1}) \quad (15)$$

כאשר

$$A = \begin{bmatrix} \Phi_{f,1} \dots \Phi_{f,p} & \mathbf{0}_{k \times [(5-p)(k)]} & & & \\ & I_{4 \times k} & \mathbf{0}_{4k \times k} & & \\ & & & \Phi_{u,1} \dots \Phi_{u,q} & \\ & \mathbf{0}_{5N+1 \times 5k} & & I_{4N} & \\ & & & & \mathbf{0}_{4(N+1) \times (N+1)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \Sigma_{vv}^{1/2} & \mathbf{0}_{k \times N+1} \\ \mathbf{0}_{4k \times k} & \mathbf{0}_{4k \times N+1} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times k} & \Sigma_{ww}^{1/2} \\ \mathbf{0}_{4(N+1) \times k} & \mathbf{0}_{4(N+1)(N+1)} \end{bmatrix}$$

$$C = [H_0 \Lambda \dots H_4 \Lambda \dots H_0 \dots H_4]$$

את וקטור המצב נאמוד באמצעות מסנן קלמן ואת הפרמטרים – ע"י מקסום ישיר של

פונקציית הנראות.

3.3. מודל 3 (Schumacher) - מודל פקטורי בתדירות מעורבת שנאמד באמצעות רכיבים ראשיים

תחילה נגדיר את המטריצה A_y באופן הבא,

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

בהתחשב בכך,

$$y_q = A_y y_m \quad (16)$$

כאשר

$$y_m = \begin{bmatrix} y_{1,m} \\ y_{2,m} \\ y_{3,m} \\ y_{4,m} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

המטריצה A_y מבצעת את המעבר בין שיעורי השינוי של התוצר החודשי והרבעוני, כפי שהדבר מתואר במשוואה (2).

$$y_t^* = \begin{bmatrix} y_{t,m} \\ y_{t,ex} \end{bmatrix} \text{ נניח שהוקטור מאופיין ע"י מודל פקטורי באופן הבא,}$$

$$y_t^* = \Lambda F^t + e_t \quad (17)$$

כאשר F_t הוא וקטור r ממדי, Λ הוא מטריצת מקדמים (loadings) בממד $(N+1) \times r$, ו- e_t הוא רכיב אידיוסינקרטי. הפקטורים במודל זה נאמדים במסגרת אלגוריתם EM – נתאר אותו להלן – ע"י הרכיבים הראשיים עם r הערכים העצמיים הגבוהים ביותר. הרכיבים הראשיים הם למעשה הווקטורים העצמיים $V = (V_1, \dots, V_r)$ המתאימים לערכים העצמיים הנ"ל של המטריצה

$$\hat{\Lambda} = V^{-1} F^t = V' y_t^* \quad \text{כלומר } T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t^* y_t^{*'}.$$

להלן מופיעים השלבים של אלגוריתם ה-EM.

שלב 1 – כאומדן ראשוני (נאיבי) לסדרת התוצר החודשי ניקח את הממוצע של התוצר הרבעוני. כעת נחשב את הרכיבים הראשיים של y^* ואת מטריצת המקדמים באופן המתואר למעלה.

שלב 2 – בהינתן הפקטורים והמקדמים מהשלב הקודם, $F^{t(j-1)}$ ו- $\Lambda^{(j-1)}$, נחשב עבור החזרה ה- j אומדן מעודכן של התוצר החודשי באופן הבא:

$$y_m^{(j)} = E \left(y_m / y_q, F^{t(j-1)}, \Lambda_m^{(j-1)} \right) = F^{t(j-1)} \Lambda_m^{(j-1)} + A_y' (A_y A_y')^{-1} \left(y_q - A_y F^{t(j-1)} \Lambda_m^{(j-1)} \right) \quad (18)$$

כאשר $\Lambda_m^{(j-1)}$ הינו וקטור המקדמים לתוצר החודשי.

אומדן התוצר החודשי במשוואה (18) מורכב משני רכיבים. הרכיב הראשון – $F^{t(j-1)} \Lambda_m^{(j-1)}$ – הוא ניבוי התוצר החודשי לפי מודל (17), והוא שווה למכפלה של הפקטורים במקדמים. הרכיב השני נוטל את ההפרש שנוצר בין התוצר הרבעוני לבין הניבוי שלו ומחלק אותו בין שלושת חודשי הרבעון על ידי מכפלה במטריצה $A'_y (A_y A'_y)^{-1}$. הרכיב השני נועד להבטיח שהאילוץ $y_q = A_y y'_m$ אכן יתקיים. שלב 3 – נחזור על שלב 1 אך במקום ערכים התחלתיים ניקח את האומדן של התוצר החודשי מהשלב הקודם. נמשיך באופן זה עד להתכנסות.

3.4. מודל 4 (Chow and Lin) – מודל רגרסיה של (Chow and Lin 1971)

יהיו $y_{t,m}, y_{t,ex}, y_{t,q}$ התוצר הרבעוני, התוצר החודשי והמשתנים המסבירים, בהתאמה. נניח שקיים קשר ליניארי בין התוצר החודשי ובין קבוצה של משתנים מסבירים,

$$y_{t,m} = y_{t,ex} \beta + u_t \quad u \sim N(0, V)$$

כאשר ה- u הם השאריות המתפלגות נורמלית. כמקודם, נגדיר את המטריצה C , הסוכמת את התוצר החודשי לרבעוני, באופן הבא:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

בהתחשב בכך,

$$y_q = Cy_m = Cy_{ex} \beta + Cu = y_+ \beta + u_+ \quad ; \quad E(u_+ u_+') = CVC' = V_+$$

נרצה לאמוד את y_m באמצעות אומדן חסר הטיה $z = Ay_q = A(y_+ \beta + u_+)$ כך ש

$$E(z - y_m) = E[A(y_+ \beta + u_+) - (y_m \beta + u)] = (Ay_+ \beta + y_m) = 0 \quad (19)$$

ומטריצת השוניות של $z - y_m$ היא:

$$Cov(z - y) = E(Au_+ - u)(Au_+ - u)' = AV_+ A' - AEu_+ u' - E(uu_+)' A' + V \quad (20)$$

נמוער את (20) באילוץ (19) ונקבל את התוצאה הבאה (ראו (Chow and Lin, 1971):

$$z = y_{ex} \hat{\beta}_{GLS} + (E(uu_+)' V_+)^{-1} \hat{u}_+ \quad (21)$$

$$\hat{\beta}_{GLS} = (y_+' V_+^{-1} y_+)^{-1} y_+' V_+^{-1} y_q \quad \text{כאשר}$$

ב-21) האומדן לתוצר החודשי מורכב משני ביטויים; הראשון הוא מכפלה של המשתנים המסבירים החודשיים במקדמי הרגרסיה והשני – השאריות מוכפלות במטריצה $(E(uu_+)'V_+)$. הביטוי השני למעשה מחליק את השארית הרבעונית בין החודשים. לחילופין ניתן להחליק את השאריות לפי מודל 3 ובאופן הבא⁹:

$$C'(CC')^{-1}(y_q - Cy_{ex} \hat{\beta}_{GLSS})$$

את האמידה של המטריצה V_+ נערוך פעמיים, פעם בהנחה שהיא אלכסונית קבועה, כלומר $V_+ = \sigma^2 I$, ופעם בהנחה ש- $u \sim AR(p)$. מודל זה, בהנחה שהמטריצה אלכסונית וקבועה, ישמש כמודל ייחוס (Benchmark Model) לשאר המודלים.

4. תיאור הנתונים ושיטת ההשוואה בין המודלים

לצורך ההשוואה התייחסנו לתקופה 1/1995—12/2011, ולקחנו את הסדרות החודשיות הבאות לאחר ניכוי עונתיות: מדד הייצור התעשייתי, פדיון מסחר ושירותים, משרות שכירים, יצוא סחורות, יצוא שירותים, יבוא צריכה, יבוא תשומות לייצור, יצוא סחורות – ארה"ב, יצוא שירותים – ארה"ב, מחיר חבית נפט, מדד הייצור התעשייתי – רכיבים אלקטרוניים, מדד הייצור התעשייתי – טקסטיל, מדד סקר מעסיקים – רכיבים אלקטרוניים. כמו כן לקחנו את סדרת התוצר בתדירות רבעונית, מנוכה עונתיות. השיקולים שהנחו אותנו בבחירת הסדרות הם הקשר הכלכלי בין לבין סדרת התוצר בתדירות רבעונית או/ו הקשר הסטטיסטי הבו-זמני ביניהן. למעשה, 8 הסדרות הראשונות הן הסדרות המרכיבות כיום את המדד המשולב למצב המשק, והסדרות האחרות קשורות בקשר סטטיסטי לתוצר בתדירות רבעונית לפי רגרסיית לאסו (Lasso regression), מודל שמחפש קבוצה מצומצמת של משתנים מסבירים מתוך קבוצה רחבה (Shrinkage).

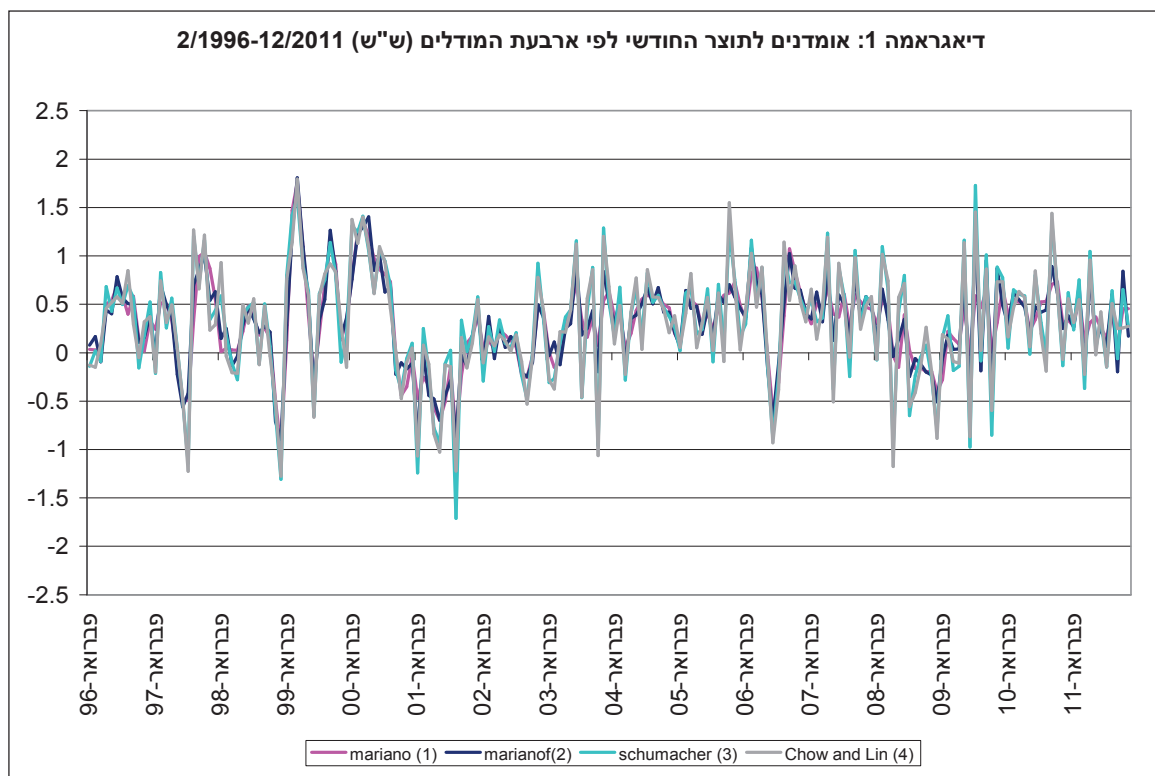
מתוך קבוצה זו בחרנו תת קבוצה של סדרות שנתנה תוצאה אופטימלית בבדיקת טיב חיזוי (עקיפה) שנעשתה מחוץ למדגם, ועשינו זאת בדרך הבאה: הורדנו את הנתונים משלוש השנים האחרונות, 2009—2011 (טווח קצר), אמדנו את מקדמי המודל לכל אחד מארבעת המודלים, והשתמשנו בהם כדי לחזות את התוצר בחודש הראשון של הרבעון הבא. לאחר מכן הוספנו למדגם את התצפית של החודש הבא, אמדנו שוב פרמטרים וקיבלנו ניבוי לחודש שאחריו, וחוזר חלילה. בדרך זו

⁹ החלקה זו מקיימת את אילוף (2). השתמשנו בהחלקה זו, ולא בהחלקה שמציעים (Chow and Lin (1971), מכיוון שחוקרים אלה השתמשו ברמות של התוצר הרבעוני ובמטריצת קישור (בין התוצר הרבעוני לחודשי) שונה מזו המוצגת במאמר זה.

קיבלנו את ניבויי החודשים – ובעזרתם את הרבעונים (מחוץ למדגם) – עבור שלוש השנים הללו. את טיב החיזוי חישבנו על ידי כך שנטלנו את שורש הטעות הריבועית הממוצעת (RMSE) של ניבוי התוצר הרבעוני והשווינו אותו לנתוני התוצר הרבעוני בפועל בשלוש השנים אחרונות. לא בדקנו את כל ההרכבים האפשריים, מפאת ריבויים, אלא רק קבוצה חלקית, וזאת לפי כלל החלטה שקבענו מראש¹⁰. לכל אחד מהמודלים בדקנו בסך הכול כ-60 הרכבים שונים.

5. תוצאות האמידה של המודלים

בשלב ראשון נציג את האומדנים של כל שיטה לתוצר החודשי (שיעורי השינוי) בתקופה 1/1995—12/2011. קבוצת המשתנים שנבחרה על יסוד הטעות הריבועית הממוצעת כוללת את: מדד הייצור התעשייתי, פדיון מסחר ושירותים, משרות שכירים, יצוא שירותים ויצוא שירותים – ארה"ב. לצורך אמידה היסטורית השתמשנו בכל הנתונים (T), ונוסף על כך אילצנו את אומדני התוצר החודשי להסתכם במדויק בנתוני התוצר הרבעוני. דיאגרמה 1 להלן מציגה את האומדנים של כל המודלים לשיעורי השינוי בתוצר החודשי, במונחים רבעוניים.



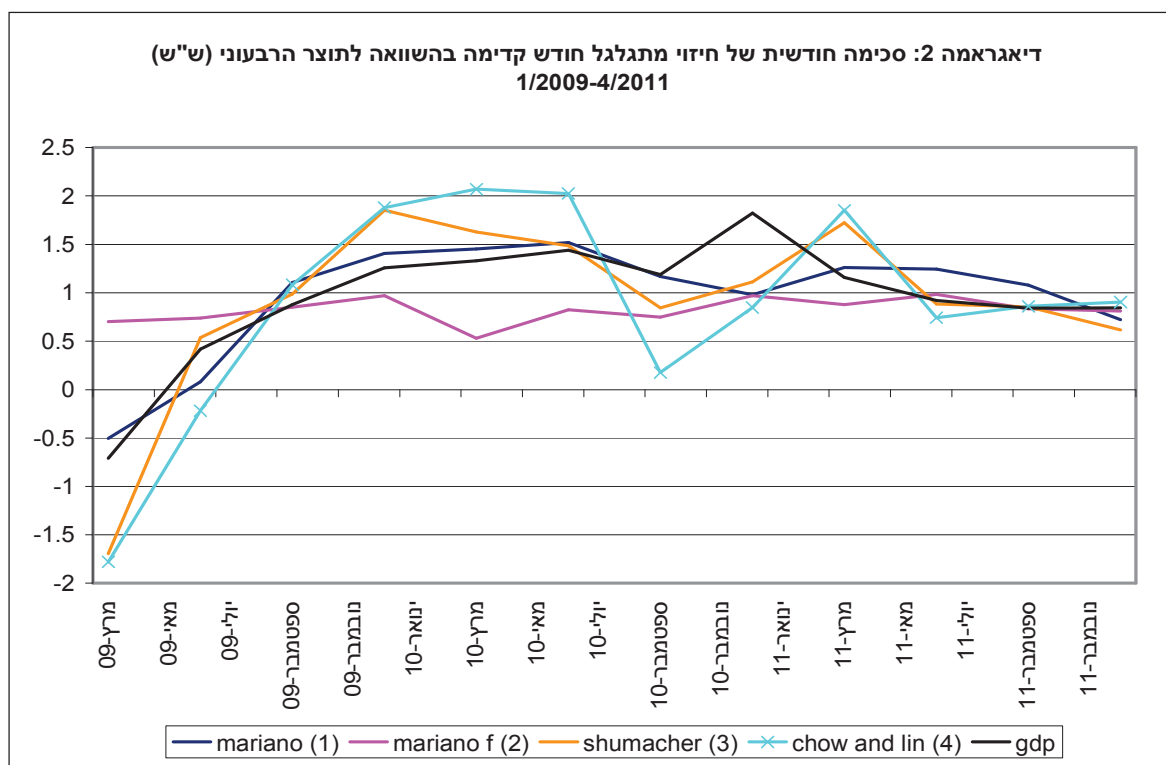
מדיאגרמה 1 ניתן לראות שמודלים 1—4 מניבים אומדנים די קרובים, במיוחד בתחילת התקופה, בין השנים 1996—2000. יחד עם זאת, האומדנים המתקבלים ממודל 1 דומים יותר לאלו המתקבלים

¹⁰ בכל הרכב נכללו המשתנים (1) מדד הייצור התעשייתי, (2) פדיון מסחר ושירותים ו-(3) משרות שכיר, ולא להוסיף כל פעם משתנה או זוג משתנים מתוך המשתנים הנותרים.

ממודל 2, האומדנים המתקבלים ממודל 3 דומים יותר לאלו המתקבלים ממודל 4¹¹, ושני המודלים האחרונים מניבים אומדנים יותר תנודתיים מאשר שני הראשונים.

כאמור, התוצר החודשי הינו (כיום) משתנה בלתי נצפה ולפיכך אין דרך ישירה לבחון את טיב האומדנים כדי להכריע בין המודלים השונים. אך נוכל לבחון את השיטות בדרך עקיפה ע"י כך שנערך לתוצר החודשי חיזוי מתגלגל לחודש קדימה (כאשר אין משתמשים בנתון האחרון של התוצר הרבעוני), ונשווה את סכום האומדנים בחודשים הללו לתוצר הרבעוני בפועל.

דיאגרמה 2 להלן מציגה לכל מודל את הסכימה הרבעונית של חיזוי מתגלגל חודש אחד קדימה, את סדרת ניבויי הרבעונים צעד אחד קדימה (כפי שהיא תוארה לעיל) ואת סדרת התוצר הרבעוני בפועל בתקופה 1/2009—4/2011.



דיאגרמה 2 מראה שמודלים 1, 3 ו-4 עולים על מודל 2 בבדיקת טיב החיזוי (העקיף) מחוץ למדגם, משום שמודל 2 אינו מצליח ללכוד את התנודתיות המחזורית של התוצר הרבעוני. כמו כן ניתן לראות שמודל 1 (Mariano) מיטיב לחזות מחוץ למדגם ביחס לשאר המודלים. נציין שבמודל 1 לקחנו פיגור אחד, כלומר המשתנים החודשיים מאופיינים ע"י המודל $VAR(1)$ (ראו משוואה 4).

¹¹ ייתכן כי דמיון זה נובע מכך ששני המודלים הראשונים מאפשרים לתוצר החודשי להיות מוסבר גם ע"י פיגורים של המשתנים המסבירים או פקטור משותף שלהם, שעה ששני המודלים האחרונים הינם מודלים המאפשרים השפעה סימולטנית בלבד.

כדי להכריע בין המודלים חישבנו את הטעות הריבועית הממוצעת בשלוש השנים. לוח 1 להלן

מצגי השוואה של הטעות הריבועית הממוצעת במודלים 1—4.

לוח 1: השוואה של הטעות הריבועית הממוצעת (RMSE)

המודל	2011—2009
Mariano (1)	0.0028
Mariano factors (2)	0.0062
Schumacher (3)	0.0061
Chow and Lin (4)	0.0075

לפי לוח 1, מודל 1 מיטיב לחזות בטווח הקצר (0.0028). כמו כן, שלושת המודלים הראשונים מיטיבים לחזות יחסית למודל הייחוס (Benchmark Model). כאמור, האומדנים הללו לתוצר החודשי הינם מחוץ למדגם ומשכך אינם מקיימים את האילוץ במשוואה (2). לפיכך נוכל להשתמש בתוצאות המוצגות בלוח 1 גם כדי לבדוק כיצד המודלים מחשב אומדני הבזק לתוצר החודשי. כמו כן ניתן לאמוד בעקיפין איזה חלק מהאומדנים החודשיים נובע מהאינפורמציה הגלומה במשתנים המסבירים וכן – איזה חלק נובע מהחלקת השאריות לפי כלל החלטה שאינו תלוי במשתנים המסבירים.

כדי להשלים את התמונה לוח 2 מציג את המקדמים של ניבוי התוצר מתוך מודל ה- $VAR(1)$

שבמודל 1.

לוח 2: מקדמי המודל $VAR(1)$ שבמודל 1.

המשתנה	מקדם מנורמל
התוצר החודשי	0.4197
ייצור תעשייתי	0.0355
פדיון מסחר ושירותים	0.0321
משרות שכיר	0.0255
יצוא שירותים	0.0225
יצוא שירותים - ארה"ב	-0.008

6. בדיקות של עמידות ומובהקות התוצאות (robustness checking)

6.1. נקודות התחלה במודלים השונים

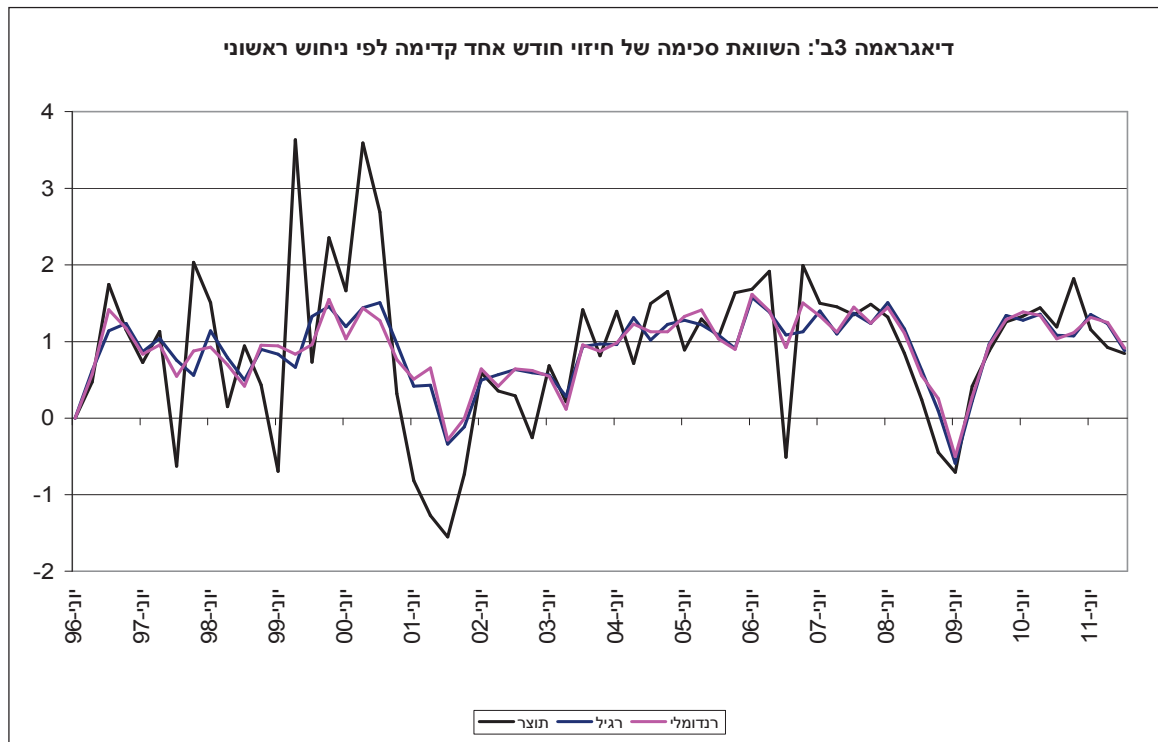
מודלים 1—3 (Mariano 1, Mariano 2, Schumacher) דורשים להזין נקודות התחלה/ניחוש ראשוני לתוצר החודשי; מודל 3 דורש ניחוש ראשוני לכל התקופה הנבדקת ומודלים 1 ו-2 דורשים נקודות התחלה רק לנקודת הזמן הראשונה (זמן 0). מודלים 1 ו-2 דורשים גם נקודות התחלה לפרמטרים

המבניים של מודל המצב-מרחב. במודל 3 (Schumacher) לקחנו, כפי שמציעים בספרות, ערך התחלתי נאיבי עבור התוצר החודשי, היינו התוצר הרבעוני מחולק בשלוש (במונחים חודשיים). בשני המודלים הראשונים חישבנו את הערכים ההתחלתיים לפרמטרים ע"י הרצת מודל VAR על הנתונים החודשיים, כאשר את הנתונים הבלתי נצפים של התוצר החודשי זקפנו (imputation) באמצעות הניחוש הראשוני של מודל 3.

כדי לבדוק את רגישותן של תוצאות האמידה לנקודות ההתחלה בדקנו 500 ניחושים ראשוניים באופן רנדומלי בטווח המשתרע בין 50% ל-150% מהאומדנים שנתקבלו בניחוש הנאיבי עבור כל הפרמטרים. עבור כל ניחוש התחלתי קיבלנו את אומדני הפרמטרים. מתוכם בחרנו את האומדנים שהביאו למקסימום את פונקציית הנראות (likelihood). דיאגרמה 3 להלן מציגה את תוצאות האמידה לפי הניחוש הראשוני המתואר בתחילת הסעיף ואת התוצאות שהתקבלו באמצעות הרנדומיזציה.



מדיאגרמה 3א' ניתן לראות כי התוצאות שהתקבלו באמצעות הרנדומיזציה תנודתיות יותר בסוף התקופה. דיאגרמה 3ב' להלן מציגה סכימה חודשית של חיזוי לחודש אחד קדימה ביחס לתוצר הרבעוני (בתוך המדגם).



לפי דיאגרמה 3ב' אין הבדלים משמעותיים בין שתי השיטות אף על פי שבאמידת התוצר החודשי יש ביניהן הבדלים. נראה כי ההבדלים הללו מתקזזים בסכימת החודשים.

6.2. שיטה חלופית לאמידת הפרמטרים והתוצר החודשי במודל 1 – אלגוריתם ה-EM

אלגוריתם ה-EM (Dempster, Laird and Rubin, 1977) הוא שיטה חלופית להביא למקסימום את פונקציית הנראות באמידת מודלים עם משתנים בלתי נצפים, במקרה שלנו – התוצר החודשי, והיא בדרך כלל פחות רגישה לניחושים ראשוניים של הפרמטרים. אלגוריתם ה-EM הינו תהליך איטרטיבי כדלהלן:

נניח ש- θ הוא וקטור של הפרמטרים שברצוננו לאמוד. אזי בשלב הראשון מחשבים את הערך הצפוי (expectation): בהינתן וקטור הפרמטרים θ^{k-1} מהאיטרציה ה- $k-1$, מחשבים אומדן למשתנה הבלתי נצפה. בשלב השני עורכים מקסימיזציה: בהינתן הערך הצפוי של המשתנה הבלתי נצפה באיטרציה ה- k , ממקסמים את פונקציית הנראות כפונקציה של הפרמטרים (θ^k) . עם ניחושים ראשוניים לפרמטרים θ^k מריצים את האלגוריתם עד להתכנסות.

דיאגרמה 4 להלן מציגה את האומדנים לתוצר החודשי במודל 1 לפי שתי שיטות האמידה.



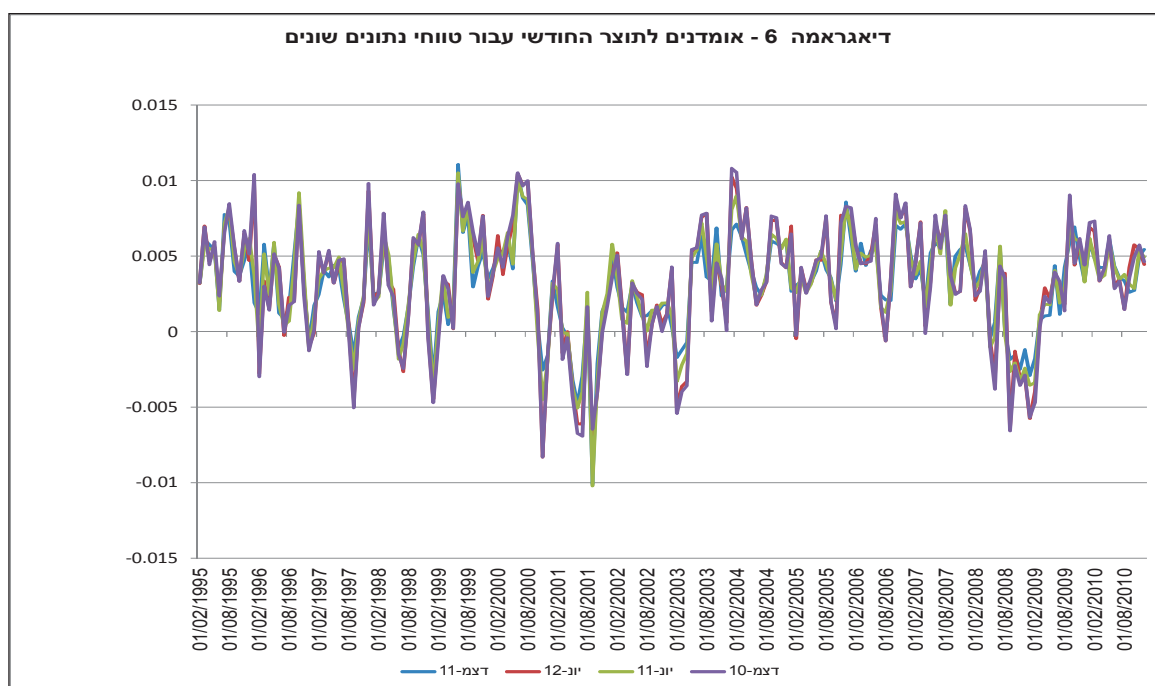
מדיאגרמה 4 ניתן לראות כי האומדנים המתקבלים באמצעות אלגוריתם ה-EM תנודתיים יותר מהאומדנים המתקבלים באמצעות המקסום הישיר. דיאגרמה 5 להלן מציגה סכימה רבעונית של האומדנים לתוצר החודשי מחוץ למדגם.



כפי שניתן לראות בדיאגרמה זו, אין הבדלים משמעותיים בין שתי השיטות אף על פי שבאמידת התוצר החודשי יש ביניהן הבדלים יותר בולטים. נראה כי ההבדלים הללו מתקזזים בסכימה החודשית.

6.3. יציבות האומדנים כתוצאה מהוספת תצפיות

כדי לבדוק את רגישות האומדנים להוספת תצפיות בסוף הסדרה, הרצנו את מודל 1 על שלוש תקופות שהן חופפות ברובן אך מסתיימות בנקודות זמן שונות: דצמבר 2010, יוני 2011, דצמבר 2011 ויוני 2012. דיאגרמה 6 להלן מציגה את האומדנים לתוצר החודשי לתקופה 2/1996—12/2010.



ניתן לראות כי קיימים הבדלים בין האומדנים אך הם אינם גדולים.

7. סיכום

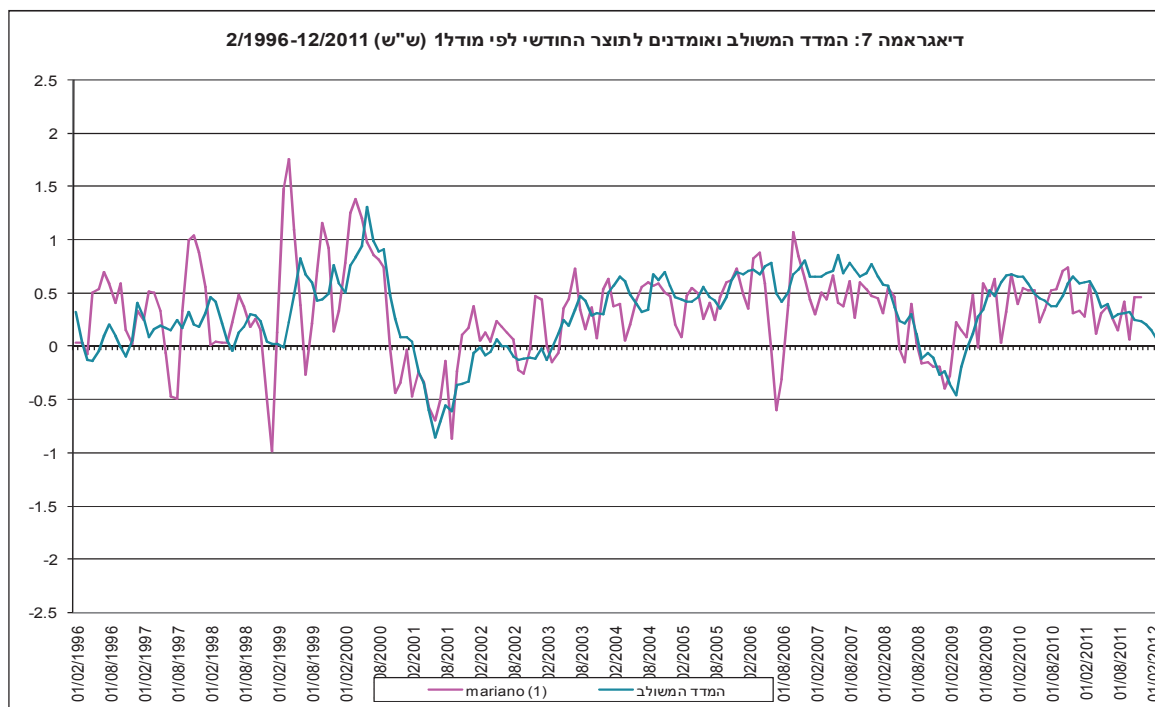
בעבודה זו בחנו 4 מודלים לאמידת התוצר החודשי בישראל באמצעות התוצר הרבעוני וקבוצה של משתנים מסבירים חודשיים. קבוצת המשתנים המסבירים החודשיים שנבחרה על בסיס הטעות הריבועית הממוצעת כוללת את: מדד הייצור התעשייתי, פדיון מסחר ושירותים, משרות שכירים, יצוא שירותים ויצוא שירותים – ארה"ב.

סדרה זו של אומדני התוצר החודשי יכולה לשמש חוקרים שמנתחים את מחזורי העסקים בישראל בתדירות חודשית ובמשך תקופה ארוכה. כתוצר נלווה לאמידה זו הצגנו גם אומדני הבזק לתוצר הרבעוני. באומדן הבזק משתמשים כאשר הנתון מהרבעון האחרון טרם התקבל אך הנתונים על המשתנים המסבירים החודשיים כבר התקבלו.

מאחר שהתוצר החודשי הינו משתנה בלתי נצפה, לא ניתן לדעת ישירות איזה מבין המודלים מיטיב לאמוד אותו. לכן בדקנו את המודלים בצורה עקיפה ע"י סכימה רבעונית של אומדני הבזק חודשיים שנאמדים מחוץ למדגם (out of sample) והשוואתם לנתוני התוצר הרבעוניים. בבדיקה עקיפה זו נמצא שבמונחים של טעות ריבועית ממוצעת, מודל 1 (Mariano and Murasawa, 2010) מיטיב לחזות את התוצר הרבעוני מחוץ למדגם בהשוואה לשאר המודלים, ובפרט בהשוואה למודל 4, שהינו מודל ייחוס (benchmark). שתי בדיקות רגישות למודל 1 – אלגוריתם ה-EM ורנדומיזציה של נקודות התחלה לפרמטרים – מצאו כי שתי השיטות מניבות אומדנים יותר תנודתיים ופחות טובים מבחינת בדיקת טיב החיזוי מחוץ למדגם.

נספח 1 – השוואה בין תוצאות האמידה למדד המשולב¹² למצב המשק

דיאגרמה 7 להלן מציגה את האומדנים לתוצר החודשי לפי מודל 1 בהשוואה למדד המשולב למצב המשק.



ניתן לראות בבירור כי המדד המשולב חלק יותר מהאומדנים לתוצר החודשי המתקבלים ממודל 1. תכונה זו נובעת מכך שהמדד נבנה בתהליך אוטו רגרסיבי והדבר מחליק אותו במידה מסוימת. כמו כן, המדד המשולב אינו מסתכם במדויק בתוצר הרבעוני. לדוגמה, בשנת 1996 ניתן לראות את הנפילה בתוצר ואת העלייה שבאה מיד לאחריה, התפתחויות שהמדד המשולב מחליק.

¹² במתכונתו החדשה, מאז פברואר 2013.

נספח 2 – סטיית תקן ואוטו-קורלציה באומדנים המנובאים (predicted)

תוצר רבעוני	תוצר רבעוני מנובא	תוצר חודשי מנובא	
0.0099	0.0067	0.0029	סטיית תקן
0.28	0.56	0.58	AR(1)
0.27	0.32	0.35	AR(2)

מלוח זה ניתן לראות כי כצפוי, התוצר המנובא פחות תנודתי מהתוצר הרבעוני בפועל (0.0067 לעומת

0.0099) וכמו כן קיימת בו הימשכות גבוהה יותר (0.56 לעומת 0.28).

ביבליוגרפיה

- Chow G.C. and Lin A.L. (1971), "Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution, And Extrapolation of time Series by Related Series" Econometric Research program Research Memorandum No 124, 1971.
- Cuche N. and Hess M. (2000), "Estimating Monthly GDP in a General Kalman Filter Framework: Evidence from Switzerland" Economic and Financial Modeling (2000)
- Hamilton J. (1994), "Time Series Analysis", Princeton University Press 1994.
- Kim C.J. and Nelson Ch. (1999), "State space Models with Regime Switching" Massachusetts Institute of Technology 1999
- Mariano R.S. and Murasawa Y. (2010), "A Coincident Index, Common Factors, and Monthly Real GDP"
- Schumacher C. and Breitung J. (2006), "Real Time Forecasting of GDP based on a large factor model with monthly and quarterly data" Deutsche Bundesbank